مثال‌هایی از مسائل بهینه‌سازی سازه‌های مکانیکی:
تیرها و خرپاها

ارائه دهنده : حسین رهنما

درس : بهینه‌سازی

مدرس: دکتر رضا معدولیت

مهر ۱۳۹۳

به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه برنگذرد

فهرست مطالب

در این ارائه عنوان می گردد

مقدمه

- ***سازه:*** **مجموعه‌ای کنار هم قرار گرفته از مواد که برای تحمل بار مشخصی به کار گرفته می‌شود. به عنوان مثال‌هایی از یک سازه می‌توان به تیرها و خرپاها اشاره کرد.**

- ***بهینه سازی:*** **به معنای طراحی عملکرد به بهترین نحو است.**

- ***بهینه‌سازی سازه‌ای:*** **طراحی عملکرد مجموعه‌ای از مواد به *بهترین* شکل ممکن است تا باری را متحمل شوند.**

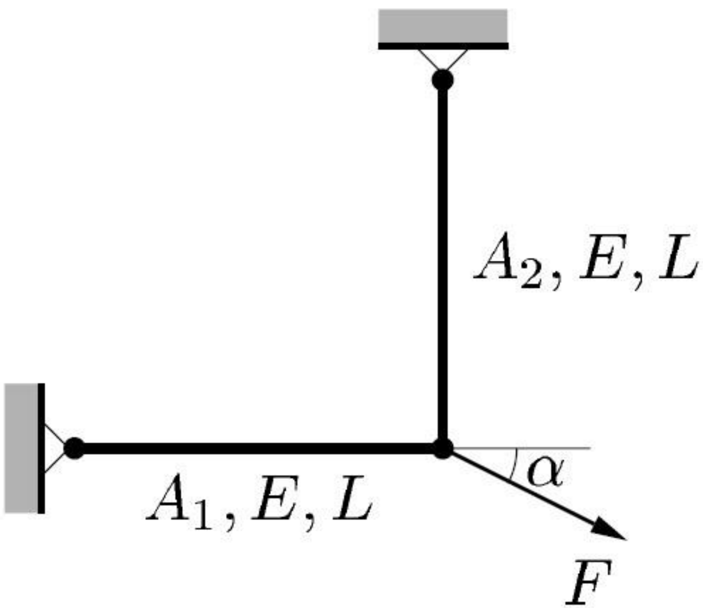
- ***بهترین:*** **اولین چیزی که به ذهن می رسد این است که وزن سازه تا آن‌جایی که ممکن است کم باشد یا به عبارت دیگر وزن سازه مینیمم گردد. ایده‌ی دیگر می‌تواند این باشد که سازه تا جایی که ممکن است از سفتی بالایی برخوردار باشد و یا تا آن‌جا که ممکن است به بارهای کمانش و ناپایداری حساس باشد. بنابراین هر مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای همراه با قیود مشخصی خواهد بود.**

❖ ۱. مینیمم سازی وزن یک خرپای دو میله‌ای تحت قید تنش

❖ **صورت مسئله:** هدف مینیمم کردن وزن سازه‌ی خرپای نشان داده شده است به طوری که در هر جز خرپا تنش از σ_0 تجاوز نکند.

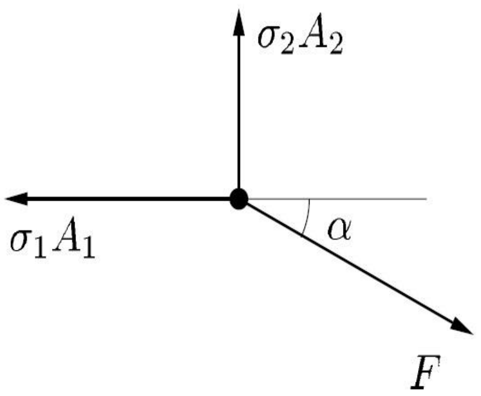
❖ فرضیات:

$$\begin{cases} F > 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 90 \end{cases}$$



❖ حل:

$$SO^{(1)}\begin{cases}\min : f\ (A_1,A_2)=(A_1+A_2)\rho L \\ s.t.\begin{cases} F\cos\alpha-\sigma_1 A_1=0 \quad \rightarrow \quad \sigma_1=\dfrac{F\cos\alpha}{A_1} \\ -F\sin\alpha+\sigma_2 A_2=0 \ \rightarrow \quad \sigma_2=\dfrac{F\sin\alpha}{A_2} \\ \left|\sigma_1\right|\le\sigma_0 \\ \left|\sigma_2\right|\le\sigma_0 \\ A_1>0 \\ A_2>0\end{cases}\end{cases}$$



❖ دیاگرام تعادل نیروها.

❖ قیدها باید ساده شوند و بر حسب متغیرهای طراحی نوشته شوند.

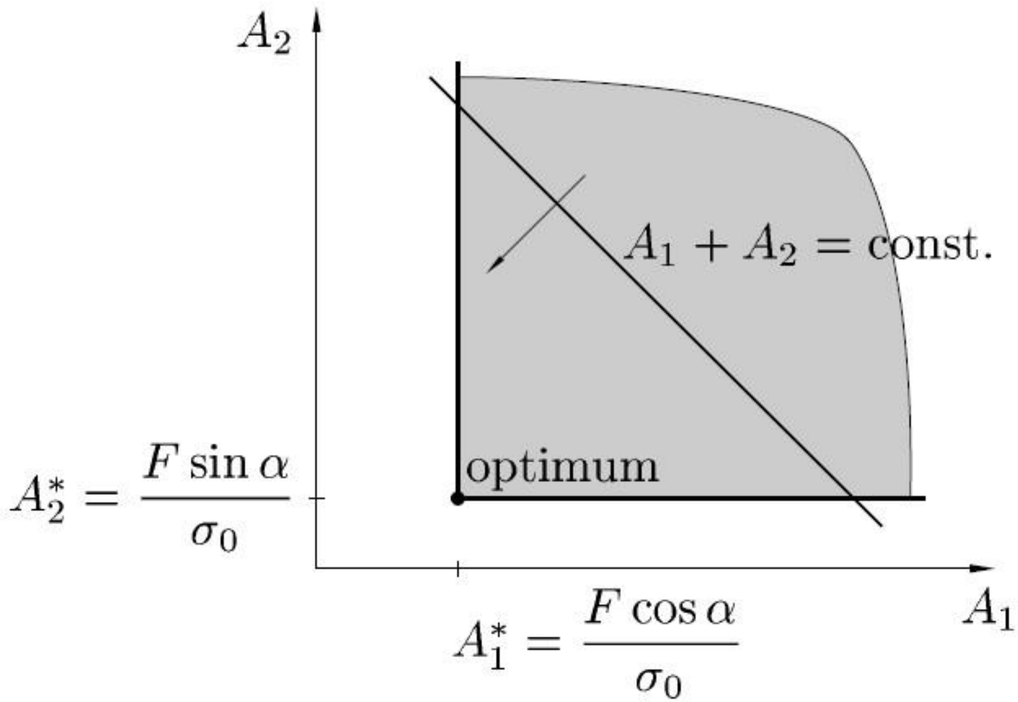
مسئله‌ی اول

❖ با ساده سازی قیدها داریم:

$$(SO)^1 \begin{cases} \min: f\ (A_1, A_2) = (A_1 + A_2)\rho L \\ s.t. \begin{cases} \left|\dfrac{F\cos\alpha}{A_1}\right| \le \sigma_0 \\ \left|\dfrac{F\sin\alpha}{A_2}\right| \le \sigma_0 \\ A_1 > 0 \\ A_2 > 0 \end{cases} \end{cases} \quad \rightarrow \quad (SO)^1 \begin{cases} \min: f\ (A_1, A_2) = (A_1 + A_2)\rho L \\ s.t. \begin{cases} A_1 \ge \dfrac{F\cos\alpha}{\sigma_0} \\ A_2 \ge \dfrac{F\sin\alpha}{\sigma_0} \end{cases} \end{cases}$$

❖ از این مثال می‌توان دریافت که قیدها همواره مستقل از هم نیستند!

❖ اکنون یک شکل شماتیک از فرم نهایی مسئله بهینه‌سازی را مشاهده می کنیم.

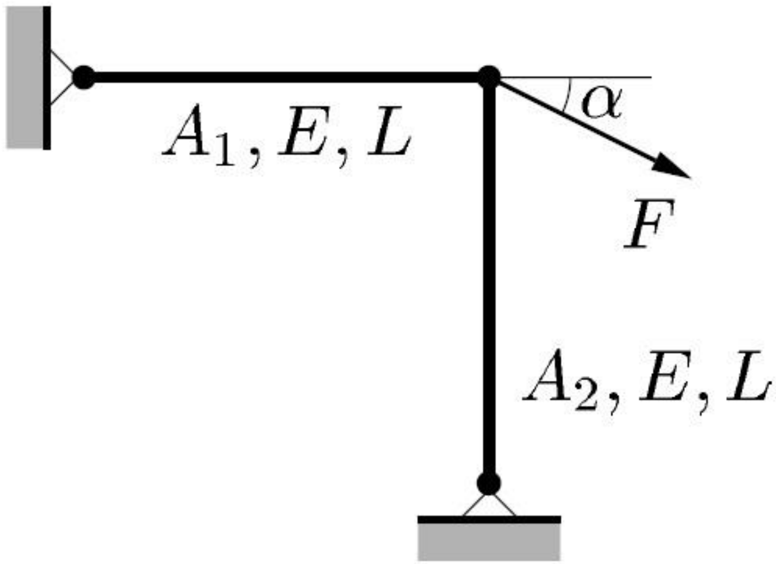


❖ به دلیل اینکه تابع هدف خطی است، نقاط اکسترمم همواره بر روی مرز خواهند بود.

مسئله‌ی دوم

❖ **۲. مینیمم سازی وزن یک خرپای دو میله‌ای تحت قیدهای تنش و ناپایداری**

❖ **صورت مسئله:** هدف مینیمم کردن وزن سازه‌ی خرپای نشان داده شده است به طوری که در هر جز خرپا تنش از σ_0 و همچنین در جز فشاری، بار از یک چهارم بار بحرانی کمانش اویلر تجاوز نکند. مقطع میله‌ها دایره‌ای شکل است.

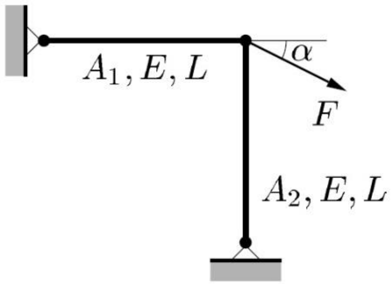


❖ فرضیات:

$$\begin{cases} F > 0 \\ \alpha = 45^\circ \end{cases}$$

مسئله‌ی دوم

❖ حل:



$$SO^{(2)}\begin{cases} \min : f\ (A_1, A_2) = (A_1 + A_2)\rho L \\ s.t. \begin{cases} F\cos 45^\circ - \sigma_1 A_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \dfrac{F}{\sqrt{2}A_1} \\ -F\sin 45^\circ - \sigma_2 A_2 = 0 \rightarrow \quad \sigma_2 = -\dfrac{F}{\sqrt{2}A_2} \\ |\sigma_1| \le \sigma_0 \\ |\sigma_2| \le \sigma_0 \\ |\sigma_2 A_2| \le \dfrac{P_c}{4} \\ A_1 > 0 \\ A_2 > 0 \end{cases} \end{cases}$$

❖ $P_c = \pi^2 \dfrac{EI}{L^2}$ بار بحرانی کمانش اویلر است.

❖ قیدها باید ساده شوند و بر حسب متغیرهای طراحی نوشته شوند.

❖ محاسبه‌ی ممان سطح: $I = \dfrac{1}{2}J = \dfrac{1}{2}\int_A r^2 d_A = \dfrac{1}{2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^3 d_r d_\theta = \dfrac{1}{2}(2\pi)(\dfrac{R^4}{4}) = \dfrac{A^2}{4\pi}$

❖ با ساده سازی قیدها و با توجه به اینکه $I_2 = \dfrac{A_2^{\,2}}{4\pi}$ داریم:

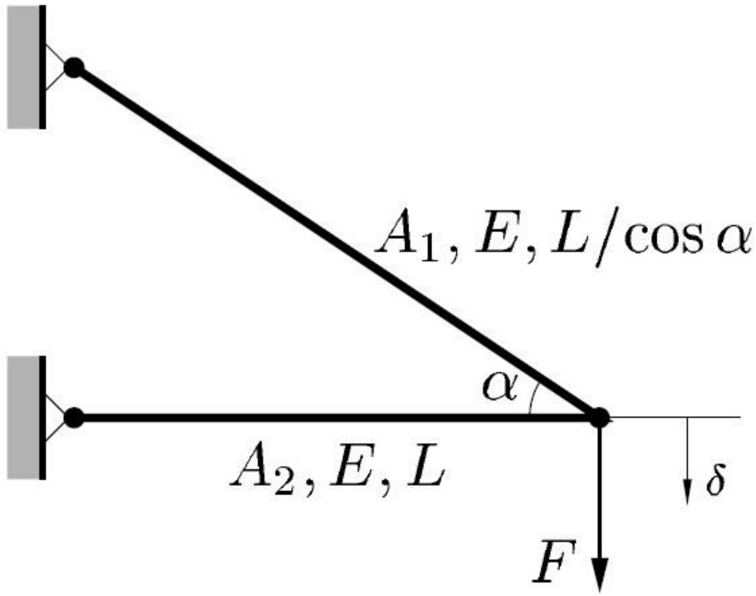
$$SO^{(2)}\begin{cases}\min : f\ (A_1,A_2) = (A_1 + A_2)\rho L \\ s.t.\begin{cases}\left|\dfrac{F}{\sqrt{2}A_1}\right| \le \sigma_0 \\ \left|-\dfrac{F}{\sqrt{2}A_2}\right| \le \sigma_0 \\ \left|-\dfrac{F}{\sqrt{2}}\right| \le \pi\dfrac{EA_2^{\,2}}{16L^2} \\ A_1 > 0 \\ A_2 > 0\end{cases}\end{cases} \quad \rightarrow \quad SO^{(2)}\begin{cases}\min : f\ (A_1,A_2) = (A_1 + A_2)\rho L \\ s.t.\begin{cases}A_1 \ge \dfrac{F}{\sqrt{2}\sigma_0} \\ or\begin{cases}A_2 \ge \dfrac{F}{\sqrt{2}\sigma_0} \\ A_2^{\,2} \ge \dfrac{16FL^2}{\sqrt{2}\pi E}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

❖ توجه نمایید که تنها یکی از دو قید دوم و سوم با توجه به مقدار سمت راست آن‌ها فعال خواهند بود. بنابراین مقادیر اکسترمم خواهند بود:

$$A_1^* = \frac{F}{\sqrt{2}\sigma_0} \quad , \quad A_2^* = \max\left(\frac{F}{\sqrt{2}\sigma_0}, \sqrt{\frac{16FL^2}{\sqrt{2}\pi E}}\right)$$

۳. مینیمم سازی وزن یک خرپای دو میله‌ای تحت قیدهای تنش و جابجایی

- **صورت مسئله:** هدف مینیمم کردن وزن سازه‌ی خرپای نشان داده شده است به طوری که در هر جز خرپا تنش از σ_0 و همچنین میزان جابجایی عمودی از δ_0 تجاوز نکند.



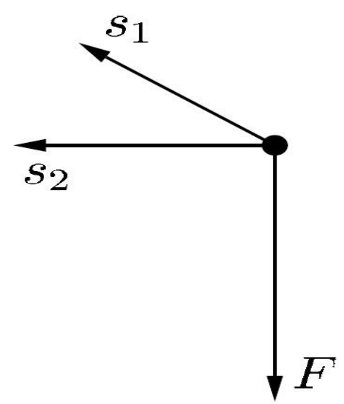
- **فرضیات:**

$$\begin{cases} F > 0 \\ \delta_0 = \dfrac{\sigma_0 L}{E} \\ \alpha = 30^\circ \end{cases}$$

مسئله‌ی سوم

❖ حل: با انتخاب متغیرهای طراحی و نوشتن تابع هدف و تمام قیود در نگاه اول داریم:

$$
SO^{(3)}\begin{cases}
\min : f\ (A_1, A_2) = (\frac{2}{\sqrt{3}} A_1 + A_2)\rho L \\
s.t.\begin{cases}
-\sigma_1 A_1 \cos 30^\circ - \sigma_2 A_2 = 0 & \rightarrow \quad \sigma_2 = -\frac{\sqrt{3}F}{A_2} \\
\sigma_1 A_1 \sin 30^\circ - F = 0 & \rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{2F}{A_1} \\
|\sigma_1| \le \sigma_0 \\
|\sigma_2| \le \sigma_0 \\
\delta \le \delta_0 \\
A_1 > 0 \\
A_2 > 0
\end{cases}
\end{cases}
$$



❖ قیدها باید ساده شوند و بر حسب متغیرهای طراحی نوشته شوند.

مسئله‌ی سوم

❖ مطابق با روندی مشابه با مثال‌های قبل پیش می رویم:

$$SO^{(3)}\begin{cases}\min: f\ (A_1,A_2)=(\frac{2}{\sqrt{3}}A_1+A_2)\rho L \\ s.t.\begin{cases}\left|\frac{2F}{A_1}\right|\le\sigma_0 \\ \left|-\frac{\sqrt{3}F}{A_2}\right|\le\sigma_0 \\ \delta\le\frac{\sigma_0 L}{E} \\ A_1>0 \\ A_2>0\end{cases}\end{cases} \rightarrow SO^{(3)}\begin{cases}\min: f\ (A_1,A_2)=(\frac{2}{\sqrt{3}}A_1+A_2)\rho L \\ s.t.\begin{cases}A_1\ge\frac{2F}{\sigma_0} \\ A_2\ge\frac{\sqrt{3}F}{\sigma_0} \\ \delta\le\frac{\sigma_0 L}{E}\end{cases}\end{cases}$$

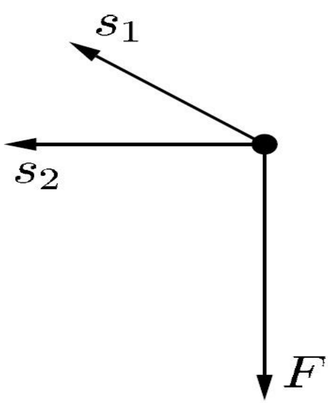
❖ اکنون باید δ را برحسب متغیرهای طراحی بیابیم تا قید سوم نیز به درستی بازنویسی گردد. (قسمت دشوار مسئله!)

مسئله‌ی سوم

❖ برای یافتن δ بر حسب متغیرهای طراحی در چند گام نظام مند پیش می رویم:

۱. معادله‌ی تعادل

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} .\mathbf{S} \rightarrow \quad -\mathbf{F} = -\mathbf{B}.\mathbf{S} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{B}.\mathbf{S}$$



–تعبیر معادله‌ی ماتریسی

۲. رابطه نیروها در اجزا با تنش‌ها

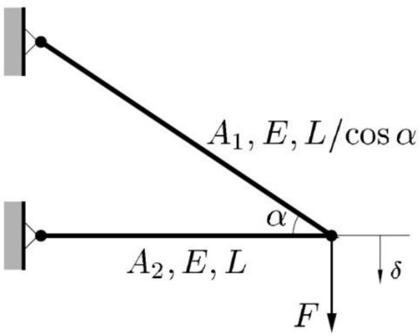
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{S} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\sigma}$$

۳. معادله‌ی ساختاری: رابطه‌ی تنش‌ها با افزایش طول میله‌ها

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}E}{2L} & 0 \\ 0 & \frac{E}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\delta}$$

مسئله‌ی سوم

۴. سینماتیک: رابطه‌ی هندسی افزایش طول‌ها با مولفه‌های جابجایی



$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=[\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2]^T.\mathbf{u}\rightarrow \quad \boldsymbol{\delta}=\mathbf{B}^T.\mathbf{u}$$

-جهت $\mathbf{d}_i$ ها از انتهای ثابت به سمت انتهای متحرک است.

-آیا می‌توانید نشان دهید که چرا $\delta_i=\mathbf{d}_i^T.\mathbf{u}$ است؟

- بدین ترتیب با ترکیب چهار گام گذشته خواهیم داشت:

$$\mathbf{F}=\mathbf{B.S}=\mathbf{B.A.}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{B.A.D.}\boldsymbol{\delta}=\mathbf{B.A.D.B}^T.\mathbf{u} \quad\rightarrow\quad \mathbf{F}=\mathbf{K.u} \quad , \quad \mathbf{K}=\mathbf{B.A.D.B}^T$$

$$\begin{bmatrix}0\\ -F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{E}{L} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}E}{2L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}$$

- ماتریس $\mathbf{K}$ متقارن است.

مسئله‌ی سوم

- در ادامه محاسبات داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8}A_1 + A_2 & -\frac{3}{8}A_1 \\ -\frac{3}{8}A_1 & \frac{\sqrt{3}}{8}A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{FL}{E}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{A_2} \\ -\frac{8}{\sqrt{3}A_1} - \frac{3}{A_2} \end{bmatrix}$$

- و در نهایت با به دست آوردن $\delta = \left| u_y \right|$ فرم مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$SO^{(3)} \begin{cases} \min : f\,(A_1, A_2) = (\frac{2}{\sqrt{3}}A_1 + A_2)\rho L \\ s.t. \begin{cases} A_1 \geq \frac{2F}{\sigma_0} \\ A_2 \geq \frac{\sqrt{3}F}{\sigma_0} \\ \frac{8}{\sqrt{3}A_1} + \frac{3}{A_2} \leq \frac{\sigma_0}{F} \end{cases} \end{cases}$$

- قید سوم غیر خطی است.

- آیا می‌توان با تغییر متغیر، قید سوم را خطی کرد به طوری که بقیه‌ی قیدها خطی باقی بمانند؟

مسئله‌ی سوم

- تغییر متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$A_1 = \frac{2F}{\sigma_0}\frac{1}{x_1} \quad , \quad A_2 = \frac{\sqrt{3}F}{\sigma_0}\frac{1}{x_2}$$

- بدین ترتیب با اعمال تغییر متغیر داریم:

$$SO^{(3)}\begin{cases} \min : \mathrm{f}(A_1(x_1), A_2(x_2)) = \dfrac{\sqrt{3}F\rho L}{\sigma_0}\left(\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right) \\ s.t. \begin{cases} x_1 \le 1 \\ x_2 \le 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{3}}x_1 + \sqrt{3}x_2 \le 1 \end{cases} \end{cases}$$

- اما قیدها از هم مستقل نیستند! می دانید چرا؟

- این تشخیص در فرم قبلی مسئله آشکار نبود! (به فایل Problem 3.mw نگاه کنید.)

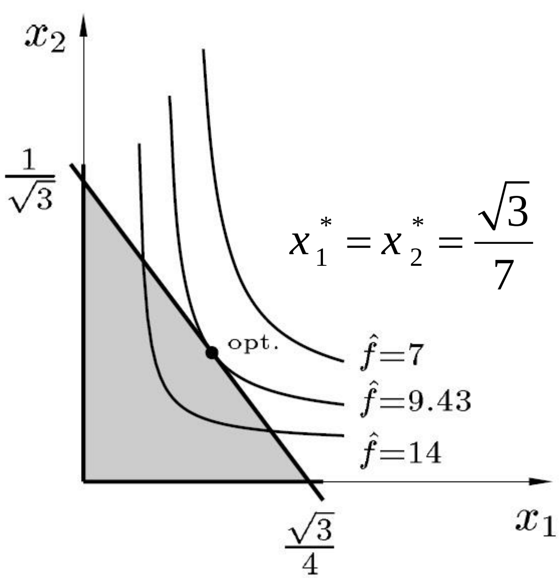
مسئله‌ی سوم

- بدین ترتیب در نهایت داریم:

$$SO^{(3)}\begin{cases}\min : \hat{f}(x_1,x_2)=\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\\ s.t.\begin{cases}x_1\geq 0\\ x_2\geq 0\\ \dfrac{4}{\sqrt{3}}x_1+\sqrt{3}x_2\leq 1\end{cases}\end{cases}$$

- تابع هدف به $\dfrac{\sqrt{3}F\rho L}{\sigma_0}$ نرمالیزه شده است.

- شکل شماتیک مسئله‌ی بهینه سازی



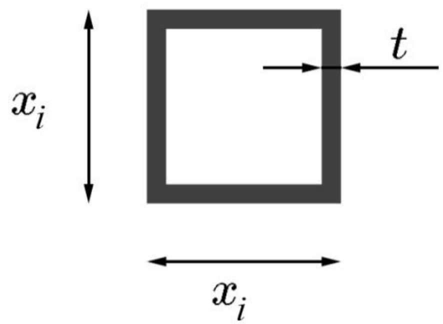
- چرا نقطه‌ی اکسترمم بر روی مرز است؟

- می‌توانید راهی برای یافتن مقادیر عددی نقطه‌ی اکسترمم پیشنهاد دهید؟

۴. مینیمم سازی وزن یک تیر دو تکه تحت قید جابجایی

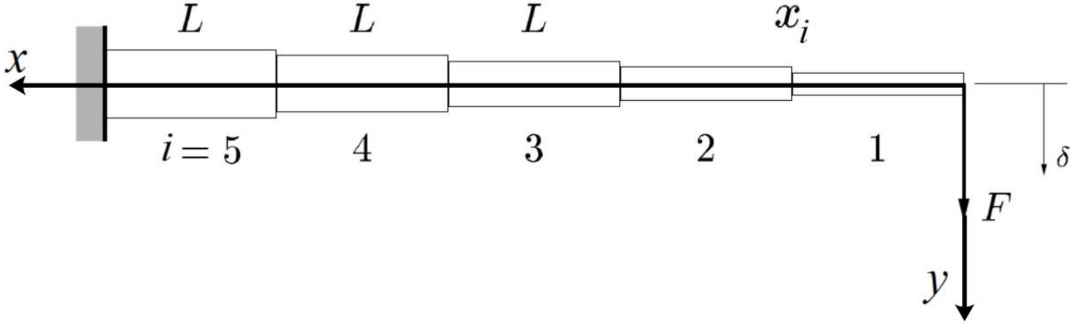
- صورت مسئله: هدف مینیمم کردن وزن تیری است که از N قسمت با سطح مقطع‌های متفاوت تشکیل شده است به طوری که میزان جابجایی عمودی در انتهای تیر از δ_0 تجاوز نکند.

- سطح مقطع قسمت i ام تیر:



فرضیات:
$$\begin{cases} F > 0 \\ N = 2 \\ t \ll x_i \end{cases}$$

- در شکل $N = 5$ است.



- ابتدا مسئله را به ازای مقدار دلخواه برای N فرموله می کنیم.

- حل: با انتخاب متغیرهای طراحی و نوشتن تابع هدف و تمام قیود در نگاه اول داریم:

$$SO^{(4)}\begin{cases}\min : g(A_1, A_2, \dots, A_N) = \rho L \sum_{i=1}^{N} A_i \\ s.t.\begin{cases}\delta \le \delta_0 \\ A_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, N\end{cases}\end{cases}$$

- محاسبه‌ی مساحت هر مقطع با در نظر گرفتن فرض $t \ll x_i$ و استفاده از بسط تیلور:

$$A_i = x_i^2 - (x_i - 2t)^2 = x_i^2[1 - (1 - \frac{2t}{x_i})^2] \simeq x_i^2\{1 - [1 + 2(\frac{2t}{x_i}) + O((\frac{t}{x_i})^2)]\} = 4tx_i$$

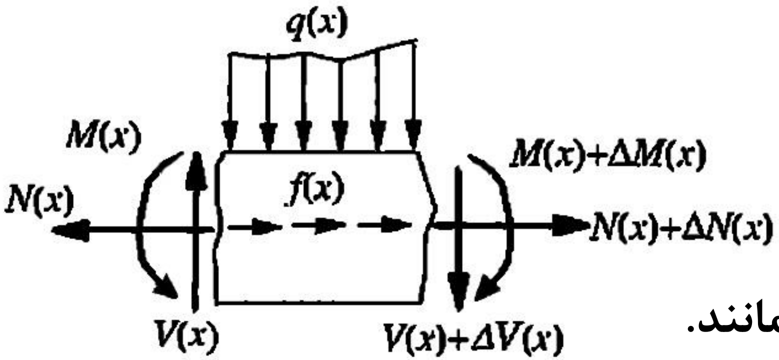
- باز نویسی مسئله:

$$SO^{(4)}\begin{cases}\min : f(x_1, x_2, \dots, x_N) = 4\rho L t \sum_{i=1}^{N} x_i \\ s.t.\begin{cases}\delta \le \delta_0 \\ x_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, N\end{cases}\end{cases}$$

- قید اول باید ساده شود و بر حسب متغیرهای طراحی نوشته شود، یعنی باید جابجایی انتهای تیر δ را محاسبه کنیم. (قسمت دشوار مسئله!)

مسئله‌ی چهارم

❖ مروری بر تئوری تیر اویلر- برنولی:

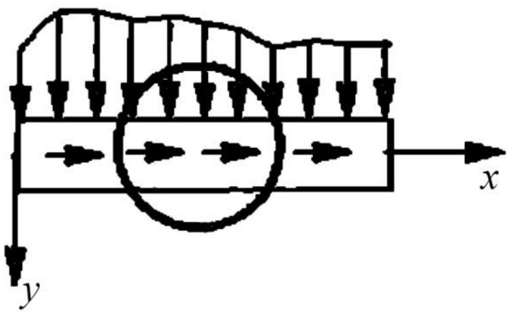


خطوط عمود بر محور تیر قبل از تغییر شکل:

الف) پس از تغییر شکل خط باقی بمانند.

ب) پس از تغییر شکل بر محور تغییر عمود باقی بمانند.

ج) دچار تغییر طول (کرنش) نمی شوند.



۱. میدان جابجایی:

$$\begin{cases} u(x,y) = u_0(x) - y\dfrac{dv_0(x)}{dx} \\ v(x,y) = v_0(x) \end{cases}$$

۲. معادلات انتگرالی تعادل:

$$\begin{cases} \dfrac{dN(x)}{dx} = -f(x) \\ \dfrac{dV(x)}{dx} = -q(x) \\ \dfrac{dM(x)}{dx} = -V(x) \end{cases}$$

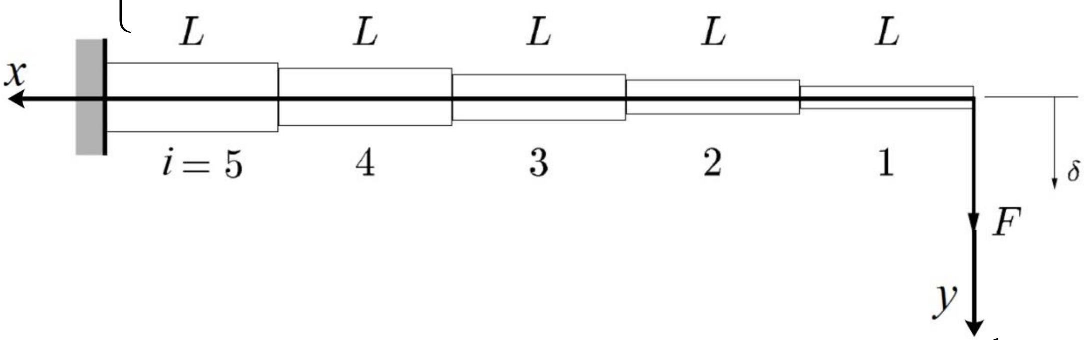
۳.معادلات حاکم:

$$\begin{cases} \dfrac{du_0(x)}{dx} = \dfrac{N(x)}{EA} \\ \dfrac{d^2 v_0(x)}{dx^2} = \dfrac{M(x)}{EI} \end{cases}$$

مسئله‌ی چهارم

- مسئله‌ی مقدار مرزی حاکم:

$$
BVP\begin{cases}
\dfrac{d^2 v_1(x)}{dx^2}=\dfrac{M_1(x)}{EI_1} & \cdots & \dfrac{d^2 v_i(x)}{dx^2}=\dfrac{M_i(x)}{EI_i} & \cdots & \dfrac{d^2 v_N(x)}{dx^2}=\dfrac{M_N(x)}{EI_N} \\
\begin{cases} v_1(L)=v_2(L) \\ \dfrac{dv_1}{dx}(L)=\dfrac{dv_2}{dx}(L) \end{cases} & \cdots & \begin{cases} v_i(iL)=v_{i+1}(iL) \\ \dfrac{dv_i}{dx}(iL)=\dfrac{dv_{i+1}}{dx}(iL) \end{cases} & \cdots & \begin{cases} v_N(NL)=0 \\ \dfrac{dv_N}{dx}(NL)=0 \end{cases} \\
0\le x\le L & \cdots & (i-1)L\le x\le iL & \cdots & (N-1)L\le x\le NL
\end{cases}
$$



- به شرایط مرزی توجه کنید.

- به دو روش مساله را حل خواهیم کرد:

الف) محاسبه‌ی مستقیم   ب)تقسیم مسئله به چند مسئله‌ی ساده (سوپرپوزیشن)

- محاسبه‌ی ممان خمشی در تیر: $M_i(x)=Fx$

❖ قسمت i ام تیر:

$$\frac{d^2 v_i(x)}{dx^2}=\frac{Fx}{EI_i} \quad , \quad \frac{dv_i(x)}{dx}=\frac{Fx^2}{2EI_i}+G_i \quad , \quad v_i(\mathrm{x})=\frac{Fx^3}{6EI_i}+G_i x+H_i$$

$$\rightarrow \; v_i'(iL)=v_{i+1}'(iL) \;\rightarrow\; \frac{FL^2 i^2}{2EI_i}+G_i=\frac{FL^2 i^2}{2EI_{i+1}}+G_{i+1}$$

$$\rightarrow \; v_i(iL)=v_{i+1}(iL) \;\rightarrow\; \frac{FL^3 i^3}{6EI_i}+LiG_i+H_i=\frac{FL^3 i^2}{6EI_{i+1}}+LiG_{i+1}+H_{i+1}$$

❖ قسمت گیر دار تیر:

$$v_N'(NL)=0 \;\rightarrow\; \frac{FL^2 N^2}{2EI_N}+G_N=0$$

$$v_N(NL)=0 \;\rightarrow\; \frac{FL^3 N^3}{6EI_N}+LNG_N+H_N=0$$

❖ یک دستگاه معادلات بازگشتی با شرایط اولیه را باید حل کنیم. (کار دشواری است اما نگران نباشید!)

❖ بازنویسی معادلات:

$$\begin{cases} G_i - G_{i+1} = -\dfrac{FL^2 i^2}{2EI_i} + \dfrac{FL^2 i^2}{2EI_{i+1}} \quad , \quad i = N-1, N-2, \ldots, 1 \\ G_N = -\dfrac{FL^2 N^2}{2EI_N} \end{cases}$$

معادلات به راحتی از هم جدا می‌شوند.

$$\begin{cases} H_i - H_{i+1} = [-\dfrac{FL^3 i^3}{6EI_i} + \dfrac{FL^3 i^3}{6EI_{i+1}}] + Li[-G_i + G_{i+1}] \quad , \quad i = N-1, N-2, .., 1 \\ H_N = -(\dfrac{FL^3 N^3}{6EI_N} + LNG_N) \end{cases}$$

❖ با ترکیب معادلات فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} H_i - H_{i+1} = \dfrac{FL^3 i^3}{3EI_i} - \dfrac{FL^3 i^3}{3EI_{i+1}} \quad , \quad i = N-1, N-2, .., 1 \\ H_N = \dfrac{FL^3 N^3}{3EI_N} \end{cases}$$

❖ برای محاسبه‌ی خیز انتهای تیر باید H_1 را از معادله‌ی بازگشتی فوق بیابیم، چرا که:

$$v_1(x) = \frac{Fx^3}{6EI_1} + G_1 x + H_1 \quad \rightarrow \quad v_1(0) = H_1$$

$$0 \le x \le L$$

❖ محاسبه‌ی H_1:

$$\begin{cases} H_i - H_{i+1} = \dfrac{FL^3 i^3}{3EI_i} - \dfrac{FL^3 i^3}{3EI_{i+1}} \quad , \quad i = N-1, N-2, .., 1 \\ H_N = \dfrac{FL^3 N^3}{3EI_N} \end{cases}$$

❖ طرفین رابطه‌ها را با یکدیگر جمع نمایید.

$$i = 1 \qquad H_1 - H_2 = \frac{FL^3 1^3}{3EI_1} - \frac{FL^3 1^3}{3EI_2}$$

$$i = 2 \qquad H_2 - H_3 = \frac{FL^3 2^3}{3EI_2} - \frac{FL^3 2^3}{3EI_3}$$

$$i = 3 \qquad H_3 - H_4 = \frac{FL^3 3^3}{3EI_3} - \frac{FL^3 3^3}{3EI_4}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$i = N-1 \quad H_{N-1} - H_N = \frac{FL^3 (N-1)^3}{3EI_{N-1}} - \frac{FL^3 (N-1)^3}{3EI_N}$$

$$H_1 - H_N = \frac{FL^3 1^3}{3EI_1} + \sum_{i=1}^{N-2} [(i+1)^3 - i^3] \frac{FL^3}{3EI_{i+1}} - \frac{FL^3 (N-1)^3}{3EI_N}$$

$$H_1 = \frac{FL^3 1^3}{3EI_1} + \sum_{i=1}^{N-2} [(i+1)^3 - i^3] \frac{FL^3}{3EI_{i+1}} + \frac{FL^3}{3EI_N} [N^3 + (N-1)^3]$$

مسئله‌ی چهارم

- محاسبه‌ی H_1:

$$H_1=\frac{FL^3 1^3}{3EI_1}+\sum_{i=1}^{N-2}[(i+1)^3-i^3]\frac{FL^3}{3EI_{i+1}}+\frac{FL^3}{3EI_N}[N^3+(N-1)^3]$$

$$H_1=\sum_{i=0}^{N-1}[(i+1)^3-i^3]\frac{FL^3}{3EI_{i+1}}$$

$$H_1=\sum_{i=1}^{N}[i^3-(i-1)^3]\frac{FL^3}{3EI_i}$$

$$H_1=\frac{FL^3}{E}\sum_{i=1}^{N}[i^2-i+\frac{1}{3}]\frac{1}{I_i}$$

- محاسبه‌ی ممان سطح با در نظر گرفتن $t \ll x_i$ و استفاده از سری تیلور:

$$I_i=\frac{x_i^{\,4}}{12}-\frac{(x_i-2t)^4}{12}=\frac{x_i^{\,4}}{12}[1-(1-\frac{2t}{x_i})^4]\simeq\frac{x_i^{\,4}}{12}\{1-[1+4(\frac{2t}{x_i})+O((\frac{t}{x_i})^2)]\}=\frac{2tx_i^{\,3}}{3}$$

- و در نهایت خیز انتهای تیر را بر حسب متغیرهای طراحی می‌نویسیم:

$$\delta=H_1=\frac{3FL^3}{2Et}\sum_{i=1}^{N}[i^2-i+\frac{1}{3}]\frac{1}{x_i^{\,3}}$$

- نفس راحتی می‌کشیم! محاسبات طولانی بود! (جواب فوق را با جواب کتاب مقایسه کنید. صفحه‌ی ۲۰، معادله‌ی ۲.۲۵)

❖ با بازنویسی مسئله داریم:

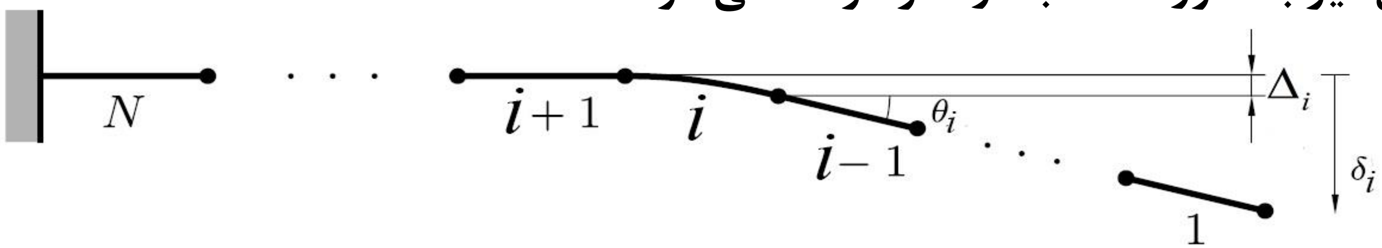
$$SO^{(4)}\begin{cases}\min : f(x_1,x_2,\ldots,x_N)=4\rho Lt\sum_{i=1}^{N}x_i\\ s.t.\begin{cases}\dfrac{3FL^3}{2Et}\sum_{i=1}^{N}[i^2-i+\dfrac{1}{3}]\dfrac{1}{x_i^3}\le\delta_0\\ x_i>0\quad i=1,2,\ldots,N\end{cases}\end{cases}$$

❖ خوشحال هستیم!

❖ به سراغ راه حل دوم می‌رویم. (راه حل کتاب)

- قضیه: خیز انتهای تیر در مسئله‌ی مطرح شده، برابر است با: $\delta = \sum_{i=1}^{N} \delta_i$

که در آن δ_i برابر خیز انتهای تیر در حالتی است که قسمت i ام الاستیک است و باقی تیر به صورت صلب در نظر گرفته می‌شود.



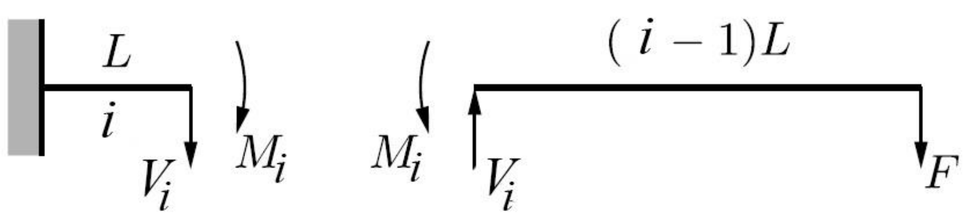
- ظاهر قضیه کاملا منطقی به نظر می‌رسد. فعلا آن را می‌پذیریم! (اثبات لحظاتی بعد)

- در این صورت با توجه به هندسه (دو دیدگاه) می‌توان نوشت:

$$\delta_i = \Delta_i + (i-1)L\theta_i$$

- بدین ترتیب کافی است تا Δ_i و θ_i را محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} \Delta_i = \dfrac{M_i L^2}{2EI_i} + \dfrac{V_i L^3}{3EI_i} \\ \theta_i = \dfrac{M_i L}{EI_i} + \dfrac{V_i L^2}{2EI_i} \end{cases}$$



مسئله‌ی چهارم

❖ نیروی برشی و ممان را در انتهای قسمت i ام محاسبه کنید.

$$M_i = (i-1)FL \quad , \quad V_i = F$$

❖ در این صورت با ترکیب سه رابطه‌ی اخیر می‌توان خیز انتهای تیر را به دست آورد:

$$\delta = \sum_{i=1}^{N} \delta_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i + (i-1)L\theta_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{M_i L^2}{2EI_i} + \frac{V_i L^3}{3EI_i} \right) + (i-1)L \left(\frac{M_i L}{EI_i} + \frac{V_i L^2}{2EI_i} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{(i-1)FL^3}{2EI_i} + \frac{FL^3}{3EI_i} \right) + (i-1)L \left(\frac{(i-1)FL^2}{EI_i} + \frac{FL^2}{2EI_i} \right) \right]$$

$$= \frac{FL^3}{E} \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{(i-1)}{2} + \frac{1}{3} \right) + (i-1) \left((i-1) + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{1}{I_i}$$

$$= \frac{FL^3}{E} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + i^2 - 2i + 1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{I_i}$$

$$= \frac{FL^3}{E} \sum_{i=1}^{N} \left[i^2 - i + \frac{1}{3} \right] \frac{1}{I_i} = \frac{3FL^3}{2Et} \sum_{i=1}^{N} \left[i^2 - i + \frac{1}{3} \right] \frac{1}{x_i^3}$$

❖ راه حل دوم به نظر کوتاه‌تر می‌آید! البته اگر اثبات قضیه و محاسبه‌ی Δ_i و θ_i را دانسته فرض کنیم!

مسئله‌ی چهارم

- **اثبات قضیه**
- اگر تیر صلب باشد، آن‌گاه $E \to \infty$ و معادله‌ی حاکم بر خیز آن $\frac{d^2v(x)}{dx^2}=0$ است.
- فرض کنید فقط قسمت iام از تیر الاستیک و باقی تیر صلب است. در این صورت:

$$BVP_i \begin{cases} \frac{d^2v_{1i}(x)}{dx^2}=0 & \cdots & \frac{d^2v_{ii}(x)}{dx^2}=\frac{M_i(x)}{EI_i} & \cdots & \frac{d^2v_{Ni}(x)}{dx^2}=0 \\ \begin{cases} v_{1i}(L)=v_{2i}(L) \\ \frac{dv_{1i}}{dx}(L)=\frac{dv_{2i}}{dx}(L) \end{cases} & \cdots & \begin{cases} v_{ii}(iL)=v_{i+1i}(iL) \\ \frac{dv_{ii}}{dx}(iL)=\frac{dv_{i+1i}}{dx}(iL) \end{cases} & \cdots & \begin{cases} v_{Ni}(NL)=0 \\ \frac{dv_{Ni}}{dx}(NL)=0 \end{cases} \\ 0\le x\le L & \cdots & (i-1)L\le x\le iL & \cdots & (N-1)L\le x\le NL \end{cases}$$

- **مسئله‌ی مقدار مرزی اصلی**

$$BVP \begin{cases} \frac{d^2v_1(x)}{dx^2}=\frac{M_1(x)}{EI_1} & \cdots & \frac{d^2v_i(x)}{dx^2}=\frac{M_i(x)}{EI_i} & \cdots & \frac{d^2v_N(x)}{dx^2}=\frac{M_N(x)}{EI_N} \\ \begin{cases} v_1(L)=v_2(L) \\ \frac{dv_1}{dx}(L)=\frac{dv_2}{dx}(L) \end{cases} & \cdots & \begin{cases} v_i(iL)=v_{i+1}(iL) \\ \frac{dv_i}{dx}(iL)=\frac{dv_{i+1}}{dx}(iL) \end{cases} & \cdots & \begin{cases} v_N(NL)=0 \\ \frac{dv_N}{dx}(NL)=0 \end{cases} \\ 0\le x\le L & \cdots & (i-1)L\le x\le iL & \cdots & (N-1)L\le x\le NL \end{cases}$$

- **به تفاوت دو مسئله‌ی بالا به دقت بنگرید.**

- معادلات را با یکدیگر جمع کنید.
- حاصل جمع جواب‌های BVP_iها، معادلات BVP را ارضا می‌کند.
- این قاعده که به دلیل خطی بودن معادلات حاصل شد را سوپرپوزیشن می‌نامند.

$$BVP_1\begin{cases}\dfrac{d^2v_{11}(x)}{dx^2}=\dfrac{M_1(x)}{EI_1} & \cdots & \dfrac{d^2v_{i1}(x)}{dx^2}=0 & \cdots & \dfrac{d^2v_{N1}(x)}{dx^2}=0\\ \begin{cases}v_{11}(L)=v_{21}(L)\\ \dfrac{dv_{11}}{dx}(L)=\dfrac{dv_{21}}{dx}(L)\end{cases} & \cdots & \begin{cases}v_{i1}(iL)=v_{i+1,1}(iL)\\ \dfrac{dv_{i1}}{dx}(iL)=\dfrac{dv_{i+1,1}}{dx}(iL)\end{cases} & \cdots & \begin{cases}v_{N1}(NL)=0\\ \dfrac{dv_{N1}}{dx}(NL)=0\end{cases}\\ 0\le x\le L & \cdots & (i-1)L\le x\le iL & \cdots & (N-1)L\le x\le NL\end{cases}$$

$$BVP_i\begin{cases}\dfrac{d^2v_{1i}(x)}{dx^2}=0 & \cdots & \dfrac{d^2v_{ii}(x)}{dx^2}=\dfrac{M_i(x)}{EI_i} & \cdots & \dfrac{d^2v_{Ni}(x)}{dx^2}=0\\ \begin{cases}v_{1i}(L)=v_{2i}(L)\\ \dfrac{dv_{1i}}{dx}(L)=\dfrac{dv_{2i}}{dx}(L)\end{cases} & \cdots & \begin{cases}v_{ii}(iL)=v_{i+1i}(iL)\\ \dfrac{dv_{ii}}{dx}(iL)=\dfrac{dv_{i+1i}}{dx}(iL)\end{cases} & \cdots & \begin{cases}v_{Ni}(NL)=0\\ \dfrac{dv_{Ni}}{dx}(NL)=0\end{cases}\\ 0\le x\le L & \cdots & (i-1)L\le x\le iL & \cdots & (N-1)L\le x\le NL\end{cases}$$

$$BVP_N\begin{cases}\dfrac{d^2v_{1N}(x)}{dx^2}=0 & \cdots & \dfrac{d^2v_{iN}(x)}{dx^2}=0 & \cdots & \dfrac{d^2v_{NN}(x)}{dx^2}=\dfrac{M_N(x)}{EI_N}\\ \begin{cases}v_{1N}(L)=v_{2N}(L)\\ \dfrac{dv_{1N}}{dx}(L)=\dfrac{dv_{2N}}{dx}(L)\end{cases} & \cdots & \begin{cases}v_{iN}(iL)=v_{i+1N}(iL)\\ \dfrac{dv_{iN}}{dx}(iL)=\dfrac{dv_{i+1N}}{dx}(iL)\end{cases} & \cdots & \begin{cases}v_{NN}(NL)=0\\ \dfrac{dv_{NN}}{dx}(NL)=0\end{cases}\\ 0\le x\le L & \cdots & (i-1)L\le x\le iL & \cdots & (N-1)L\le x\le NL\end{cases}$$

مسئله‌ی چهارم

- حالت کلی:

$$SO^{(4)}\begin{cases}\min: f(x_1,x_2,\dots,x_N)=4\rho Lt\sum_{i=1}^{N}x_i\\ s.t.\begin{cases}\dfrac{3FL^3}{2Et}\sum_{i=1}^{N}[i^2-i+\dfrac{1}{3}]\dfrac{1}{x_i^3}\le\delta_0\\ x_i>0\quad i=1,2,\dots,N\end{cases}\end{cases}$$

حالت $N=2$:

$$SO^{(4)}\begin{cases}\min: f(x_1,x_2)=4\rho Lt(x_1+x_2)\\ s.t.\begin{cases}\dfrac{FL^3}{2Et}(\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{7}{x_2^3})\le\delta_0\\ x_1>0\\ x_2>0\end{cases}\end{cases}$$

- تابع هدف خطی است، بنابراین مقادیر اکسترمم بر روی مرز هستند.

- با تبدیل مسئله به یک مسئله‌ی مینیمم سازی یک بعدی مقادیر عددی نقطه‌ی مینیمم پیدا خواهد شد:

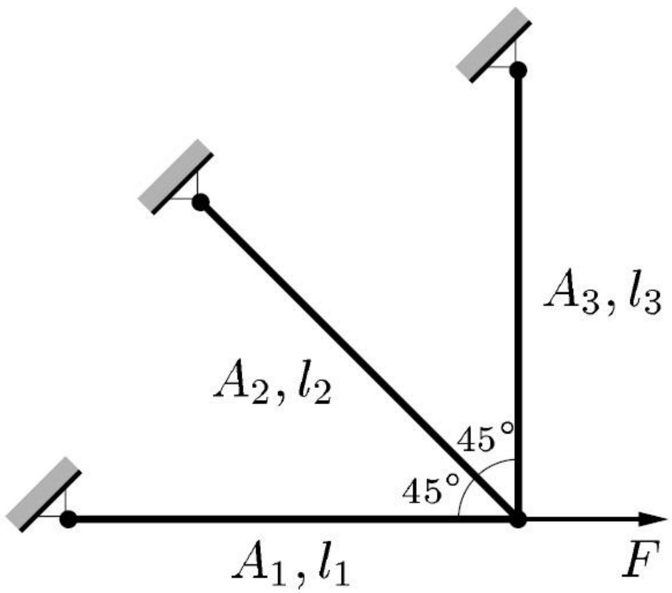
$$\begin{cases}x_1^*=\left(\dfrac{1+7^{1/4}}{C}\right)^{1/3}\\ x_2^*=7^{1/4}\left(\dfrac{1+7^{1/4}}{C}\right)^{1/3}\end{cases},\qquad C=\frac{2\delta_0 Et}{FL^3}$$

- **۵. مینیمم سازی وزن یک خرپای سه میله‌ای تحت قید تنش**

- **صورت مسئله: هدف مینیمم کردن وزن سازه‌ی خرپای نشان داده شده است به طوری که در جز i ام خرپا تنش از $\sigma_i^{\max}$ تجاوز نکند.**

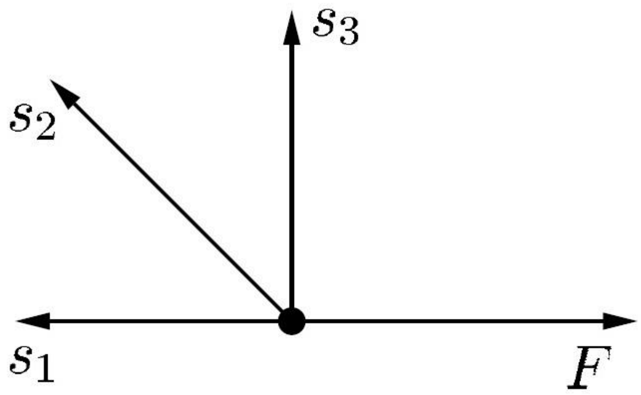
- **فرضیات:**

$$\begin{cases} F > 0 \\ A_1 = A_3 \\ l_1 = l_2 = \beta l_3 = L \quad , \quad \beta > 0 \\ \rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \end{cases}$$



- حل: با انتخاب متغیرهای طراحی و نوشتن تابع هدف و تمام قیود در نگاه اول داریم:

$$SO^{(5)}\begin{cases}\min : f\,(A_1,A_2)=\rho_1 L A_1+\rho_2 L A_2+\rho_3\dfrac{L}{\beta}A_3=L\,(\rho_1+\dfrac{\rho_3}{\beta})A_1+L\,\rho_2 A_2\\ s.t.\begin{cases}-\sigma_1 A_1-\sigma_2 A_2\cos 45^\circ+F=0\\ \sigma_3 A_3+\sigma_2 A_2\sin 45^\circ=0\\ |\sigma_1|\le\sigma_1^{\max}\\ |\sigma_2|\le\sigma_2^{\max}\qquad if\quad A_2>0\\ |\sigma_3|\le\sigma_3^{\max}\\ A_1>0\\ A_2\ge 0\end{cases}\end{cases}$$



- به علامت تساوی در قید مربوط به A_2 دقت کنید.

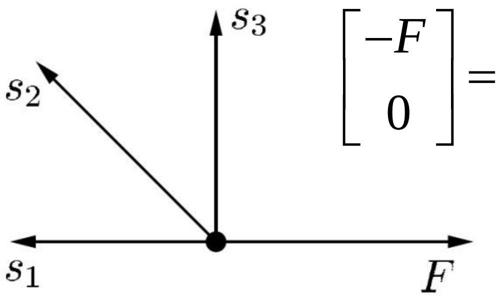
- قیدها باید ساده شوند و بر حسب متغیرهای طراحی نوشته شوند.

- به دلیل اینکه خرپا نامعین استاتیکی است، تنش‌ها مستقیم از معادلات تعادل به دست نخواهند آمد! (تفاوت این مسئله با مسئله‌ی شماره‌ی ۳)

مسئله‌ی پنجم

❖ برای یافتن تنش‌ها بر حسب متغیرهای طراحی در چند گام نظام مند پیش می رویم:

۱. معادله‌ی تعادل



$$\begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} . \mathbf{S} \rightarrow \quad -\mathbf{F} = -\mathbf{B}.\mathbf{S}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{B}.\mathbf{S}$$

–تعبیر معادله‌ی ماتریسی

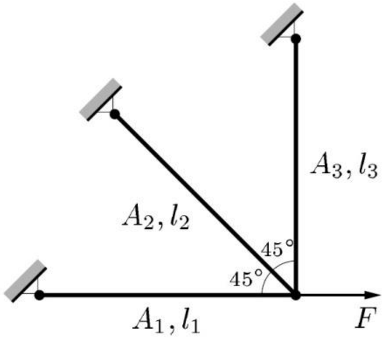
۲. رابطه نیروها در اجزا با تنش‌ها

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{S} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\sigma}$$

۳. معادله‌ی ساختاری: رابطه‌ی تنش‌ها با افزایش طول میله‌ها

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\delta}$$

۴. سینماتیک: رابطه‌ی هندسی افزایش طول‌ها با مولفه‌های جابجایی



$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3\end{bmatrix}^T.\mathbf{u}\rightarrow\quad \boldsymbol{\delta}=\mathbf{B}^T.\mathbf{u}$$

-جهت $\mathbf{d}_i$ ها از انتهای ثابت به سمت انتهای متحرک است.

-درمسئله‌ی سوم، نشان دادیم که $\delta_i=\mathbf{d}_i^T.\mathbf{u}$ است.

❖ بدین ترتیب با ترکیب چهار گام گذشته خواهیم داشت:

$$\mathbf{F}=\mathbf{B.S}=\mathbf{B.A.}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{B.A.D.}\boldsymbol{\delta}=\mathbf{B.A.D.B}^T.\mathbf{u}\quad\rightarrow\quad \mathbf{F}=\mathbf{K.u}\quad,\quad \mathbf{K}=\mathbf{B.A.D.B}^T$$

$$\begin{bmatrix}F\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0\\ 0 & 0 & A_1\end{bmatrix}\frac{E}{L}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}$$

❖ ماتریس $\mathbf{K}$ متقارن است.

مسئله‌ی پنجم

❖ در ادامه محاسبات داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} A_1 + \frac{1}{2}A_2 & -\frac{1}{2}A_2 \\ -\frac{1}{2}A_2 & \beta A_1 + \frac{1}{2}A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{FL}{EA_1}\begin{bmatrix} \dfrac{2\beta A_1 + A_2}{2\beta A_1 + (1+\beta)A_2} \\ \dfrac{A_2}{2\beta A_1 + (1+\beta)A} \end{bmatrix}$$

❖ اکنون برای محاسبه‌ی تنش‌ها داریم: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\delta} = \mathbf{D}.\mathbf{B}^T.\mathbf{u}$

❖ بدین ترتیب محاسبات به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix}^T \frac{FL}{EA_1}\begin{bmatrix} \dfrac{2\beta A_1 + A_2}{2\beta A_1 + (1+\beta)A_2} \\ \dfrac{A_2}{2\beta A_1 + (1+\beta)A_2} \end{bmatrix} = \frac{F}{2\beta A_1 + (1+\beta)A_2}\begin{bmatrix} 2\beta + \dfrac{A_2}{A_1} \\ \sqrt{2}\beta \\ -\beta\dfrac{A_2}{A_1} \end{bmatrix}$$

مسئله‌ی پنجم

❖ و در نهایت فرم کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$SO^{(5)}\begin{cases}\min: f(A_1,A_2)=L(\rho_1+\dfrac{\rho_3}{\beta})A_1+L\rho_2A_2\\ s.t.\begin{cases}\dfrac{F}{2\beta A_1+(1+\beta)A_2}(2\beta+\dfrac{A_2}{A_1})\le\sigma_1^{\max}\\ \dfrac{F}{2\beta A_1+(1+\beta)A_2}(\sqrt{2}\beta)\le\sigma_2^{\max}\qquad if\quad A_2>0\\ \dfrac{F}{2\beta A_1+(1+\beta)A_2}(\beta\dfrac{A_2}{A_1})\le\sigma_3^{\max}\end{cases}\end{cases}$$

❖ بررسی یک حالت خاص: $\beta=1\,,\ 0.5\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_0\ \ ,\ \sigma_1^{\max}=\sigma_2^{\max}=\sigma_3^{\max}=\sigma_0$

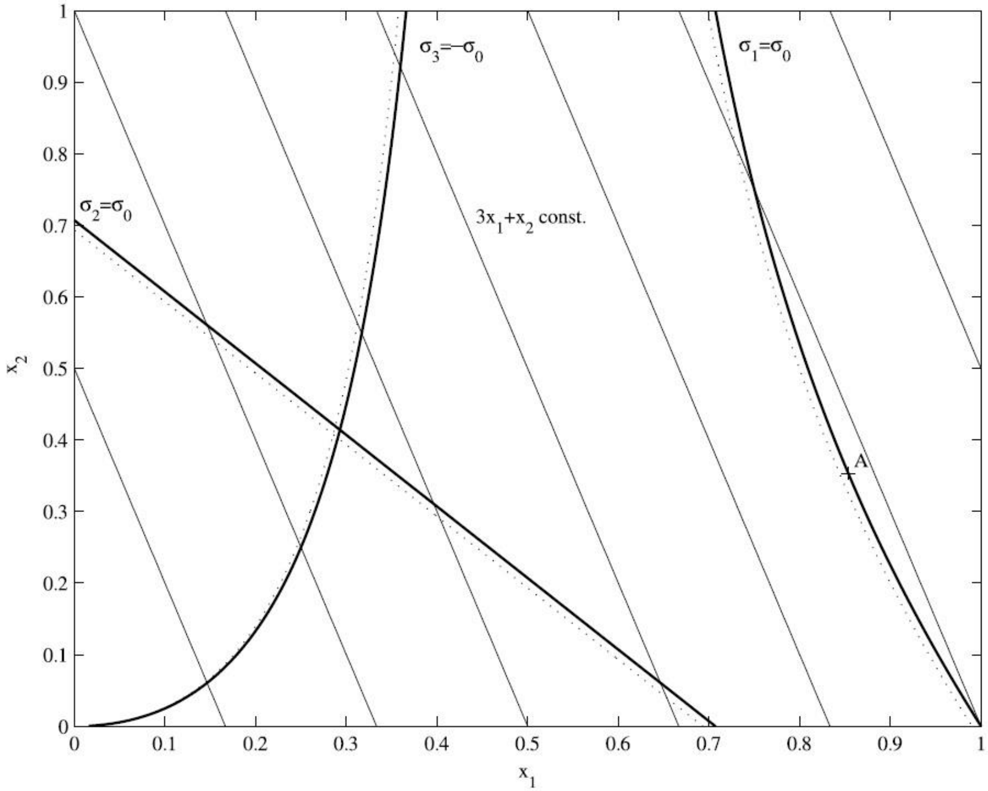
$$SO^{(5)}\begin{cases}\min: f(A_1,A_2)=\rho_0L(3A_1+A_2)\\ s.t.\begin{cases}\dfrac{F(2A_1+A_2)}{2A_1(A_1+A_2)}\le\sigma_0\\ \dfrac{F\sqrt{2}}{2(A_1+A_2)}\le\sigma_0\qquad if\quad A_2>0\\ \dfrac{FA_2}{2A_1(A_1+A_2)}\le\sigma_0\end{cases}\end{cases}$$

❖ کتاب چهار حالت خاص دیگر را نیز بررسی کرده است.

مسئله‌ی پنجم

- تغییر متغیر: $x_1 = A_1 \dfrac{\sigma_0}{F} \quad , \quad x_2 = A_2 \dfrac{\sigma_0}{F}$
- تابع هدف به $\dfrac{F \rho_0 L}{\sigma_0}$ نرمالیزه شده است.
- تحلیل مسئله‌ی بهینه‌سازی با نمودار

$$SO^{(5)} \begin{cases} \min : \hat{f}(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2) \\ s.t. \begin{cases} \dfrac{(2x_1 + x_2)}{2x_1(x_1 + x_2)} \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2(x_1 + x_2)} \le 1 \quad if \quad A_2 > 0 \\ \dfrac{x_2}{2x_1(x_1 + x_2)} \le 1 \end{cases} \end{cases}$$



- ناحیه‌ی غیر قابل قبول در سمت خطوط نقطه‌چین قرار دارد.
- قیدها از هم مستقل نیستند.
- نقطه‌ی مینیمم روی مرز است.
- مختصات نقطه‌ی مینیمم را محاسبه می‌کنیم.

مسئله‌ی پنجم

- محاسبه‌ی مختصات نقطه‌ی مینیمم: در شکل مشاهده شد که قید اول فعال است.

$$\frac{(2x_1+x_2)}{2x_1(x_1+x_2)}=1 \quad\rightarrow\quad 2x_1+x_2=2x_1^2+2x_1x_2 \quad\rightarrow\quad (1-2x_1)x_2=2x_1^2-2x_1$$

$$\rightarrow\quad x_2=\frac{2x_1^2-2x_1}{(1-2x_1)}$$

- رابطه‌ی بالا را در تابع هدف قرار می‌دهیم:

$$g(x_1)=\hat{f}(x_1,x_2(x_1))=3x_1+x_2=3x_1+\frac{2x_1^2-2x_1}{(1-2x_1)}$$

- نسبت به x_1 مشتق بگیرید و برابر صفر قرار دهید:

$$\frac{dg(x_1)}{dx_1}=3+\frac{(4x_1-2)(1-2x_1)+2(2x_1^2-2x_1)}{(1-2x_1)^2}=3+\frac{-4x_1^2+4x_1-2}{(1-2x_1)^2}$$

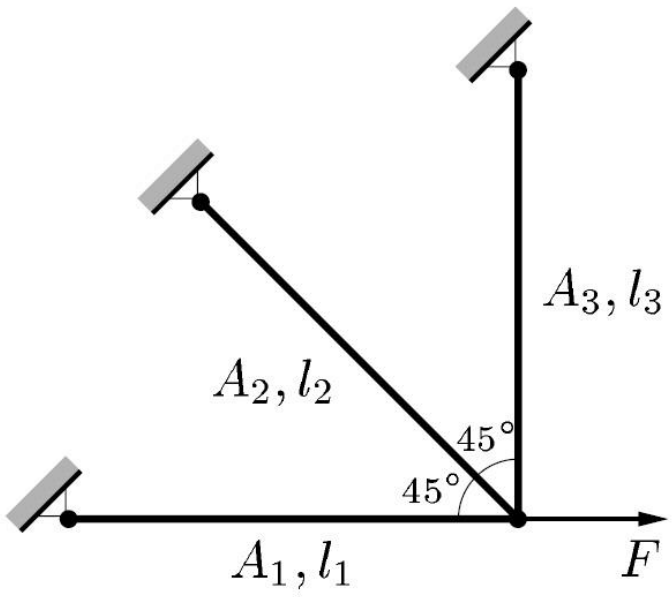
$$=\frac{8x_1^2-8x_1+1}{(1-2x_1)^2}=0 \quad\rightarrow\quad 8x_1^2-8x_1+1=0 \quad\rightarrow\quad x_1=\frac{8\pm\sqrt{32}}{16}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$$

- جواب منفی غیر قابل قبول است، چرا که x_2 منفی تولید می‌کند. در نهایت داریم:

$$x_1^*=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad , \quad x_2^*=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۶. مینیمم سازی وزن یک خرپای سه میله‌ای تحت قید سفتی

- **صورت مسئله: هدف مینیمم کردن وزن سازه‌ی خرپای نشان داده شده است به طوری که اندازه‌ی بردار جابجایی نقطه‌ی بارگذاری شده از δ_0 تجاوز نکند.**
- **فرضیات:**



$$\begin{cases} F > 0 \\ A_1 = A_3 \\ l_1 = l_2 = \beta l_3 = L \quad , \quad \beta = 0.1 \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_0 \end{cases}$$

مسئله‌ی ششم

❖ **حل: با انتخاب متغیرهای طراحی و نوشتن تابع هدف و تمام قیود در نگاه اول داریم:**

$$SO^{(6)}\begin{cases}\min : f\,(A_1,A_2)=L\,(\rho_1+\dfrac{\rho_3}{\beta})A_1+L\,\rho_2 A_2=\rho_0 L\,(11A_1+A_2)\\ s.t.\begin{cases}\mathbf{u}^T.\mathbf{u}\le\delta_0^2\\ A_1>0\\ A_2\ge 0\end{cases}\end{cases}$$

❖ **قید سفتی یا اندازه‌ی بردار جابجایی. (دلیل نامگذاری)**

❖ **می‌بایست u را برحسب متغیرهای طراحی بیابیم. این کار را در مثال قبل انجام دادیم:**

$$\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=\frac{FL}{EA_1}\begin{bmatrix}\dfrac{2\beta A_1+A_2}{2\beta A_1+(1+\beta)A_2}\\ \dfrac{A_2}{2\beta A_1+(1+\beta)A}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{u}^T.\mathbf{u}=\left(\frac{FL}{E}\right)^2\frac{4\beta^2A_1^2+4\beta A_1A_2+2A_2^2}{A_1^2\left(2\beta A_1+(1+\beta)A_2\right)^2}$$

- بنابراین با در نظر گرفتن $\beta = 0.1$ خواهیم داشت:

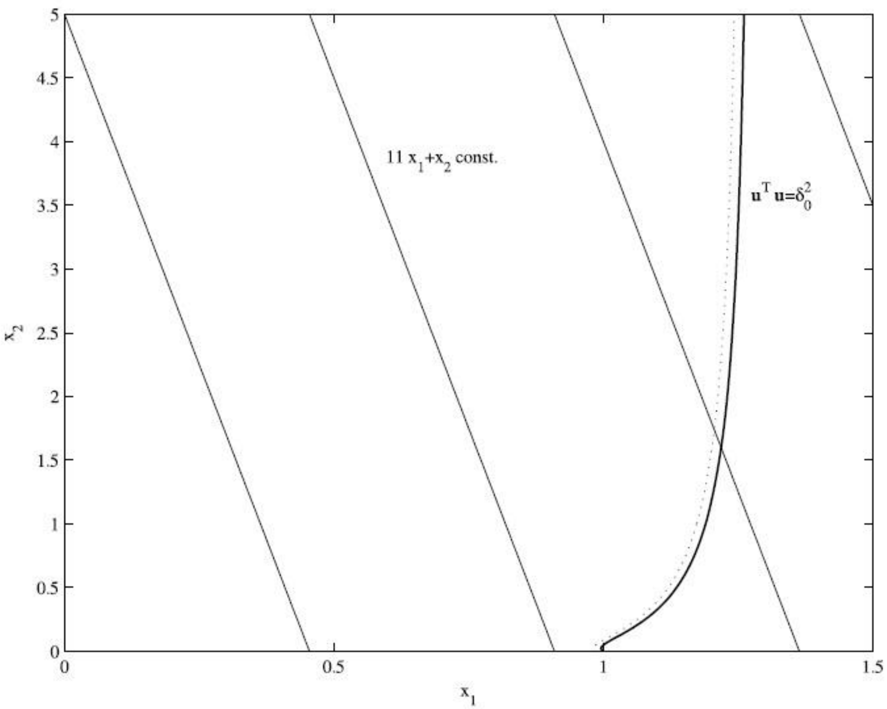
$$SO^{(6)}\begin{cases}\min: f\,(A_1,A_2)=\rho_0 L(11A_1+A_2)\\ s.t.\begin{cases}\left(\dfrac{FL}{E}\right)^2\dfrac{0.04A_1^2+0.4A_1A_2+2A_2^2}{A_1^2\left(0.2A_1+1.1A_2\right)^2}\le\delta_0^2\\ A_1>0\\ A_2\ge 0\end{cases}\end{cases}$$

- تغییر متغیر: $x_1=A_1\dfrac{E\,\delta_0}{FL} \quad , \quad x_2=A_2\dfrac{E\,\delta_0}{FL}$

- نرمالیزه کردن تابع هدف به $\dfrac{\rho_0 FL^2}{E\,\delta_0}$

$$SO^{(6)}\begin{cases}\min: \hat{f}\,(x_1,x_2)=11x_1+x_2\\ s.t.\begin{cases}\dfrac{4x_1^2+40x_1x_2+200x_2^2}{x_1^2\left(2x_1+11x_2\right)^2}\le 1\\ x_1>0\\ x_2\ge 0\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1^*=0.995\\ x_2^*=0.0169\end{cases}$$



دانشگاه علم و صنعت ایران

از توجه شما سپاسگزارم

سوالات