

توسعه تحلیلی مدل اصطکاک ریزلغزش تک بعدی و تعیین مرز گذر از

نواحی چسبندگی به لغزش

حسین نجفی^۱، پویا اصغری فرد شربانی^۲ و حمید احمدیان^۳

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه علم و صنعت ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۱/۶)

چکیده

اصطکاک پدیده پیچیده‌ای است که در اثر حرکت نسبی سطوح تماس دارای پیش‌بار به وجود می‌آید. یکی از موضوعات مهم در مدل‌سازی اصطکاک، نحوه‌ی مدل‌سازی اثرات لغزش جزئی در مدل دینامیکی سطح تماس است. در این مقاله، به صورت تحلیلی به بررسی یک مدل ریزلغزش تک‌بعدی پرداخته شده است. ابتدا، معادلات حاکم بر حرکت یک سامانه ارتعاشی دارای اتصال اصطکاکی و تحت تحریک خارجی جابه‌جایی تک‌هارمونیک بیان شده است. سپس، پاسخ پایای سامانه ارتعاشی به صورت تحلیلی به دست آمده است. توابع هدف به عنوان معیار گذر از ناحیه چسبندگی به لغزش تعریف می‌شوند. آنگاه، کمینه‌سازی توابع هدف تعریف شده، بر اساس روابط تحلیلی مربوط به پاسخ پایای سامانه و با استفاده از الگوریتم ژنتیک (G.A)، اجرا می‌شود و چینش و طول‌های مربوط به نواحی لغزش و چسبندگی تعیین می‌گردند. برخلاف پژوهش‌های انجام‌شده پیشین در این زمینه، با استفاده از مدل حاضر نیازی به حدس اولیه تعداد و موقعیت نواحی چسبندگی - لغزش، پیش از تحلیل سامانه نمی‌باشد. همچنین در این پژوهش، برای دو نوع توزیع نیروی نرمال، مرزهای چسبندگی - لغزش به کمک روش پیشنهادشده به دست آمده است و سپس، با استفاده از نتایج به دست آمده از مدل‌سازی اجزاء محدود، به خوبی، راستی‌آزمایی شده است.

واژه‌های کلیدی: چسبندگی - لغزش، نیروی عمودی متغیر، مدل اصطکاک ریزلغزش

Development of One-dimensional Microslip Friction Model and Determination of Boundary Between Stick and Slip Regions

H. Najafi, P. Asgharifard-Sharabiani and H. Ahmadian

Mechanical Engineering Department

Iran University of Science and Technology

(Received: 16/May/2014; Accepted: 26/January/2015)

ABSTRACT

Friction is a complex phenomenon which arises due to relative motion between preloaded contact interfaces. One of the most important issues in modeling friction is the debate over the way to consider a partial slip effects in the contact interface model. In this paper, a one-dimensional micro-slip model has been studied analytically. At first, governing equations of motion of a vibrating system are obtained, which is supported by a frictional contact and excited by a single harmonic displacement. Then, steady state response of a system is determined analytically. Objective functions are defined as criteria which depict a transition from stick region to slip region. Afterwards, minimization of objective functions is implemented based on steady state analytical solution and with the aid of genetic algorithm, and so, the arrangement and the lengths of segments corresponding to stick and slip regions are determined. Despite of past researches in this field, by using the proposed model, there remains no need to guess the number and locations of stick-slip regions, before the system analysis. Also in this research, The boundaries between stick and slip regions for two kind of normal load distribution have been calculated by the proposed model, and then verified by the results obtained from finite element modeling.

Keywords: Stick- Slip, Variable Normal Load, Micro-Slip Friction Model

۱- کارشناسی ارشد: h_najafi@mecheng.iust.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری (نویسنده پاسخگو): p_asgharifard@iust.ac.ir

۳- استاد: ahmadian@iust.ac.ir

فهرست علائم

E	مدول الاستیسیته (GPa)
K	سختی تماس (Nm^{-2})
A	مساحت سطح مقطع (m^2)
q	توزیع نیروی نرمال روی سطح تماس (Nm^{-1})
L_i	فاصله انتهای بخش I ام از ابتدای میله (m)
علائم یونانی	
ω	فرکانس زاویه‌ای تحریک (rad/s)
θ	$\theta = \omega t$ زاویه نیروی تحریک (rad)
ρ	چگالی (kgm^{-3})
μ	ضریب اصطکاک
β	سختی قید تکیه‌گاهی (Nm^{-1})
زیر نویس‌ها	
i	شماره بخش‌های میله از ابتدای سمت چپ

۱- مقدمه

اصطکاک پدیده بسیار پیچیده‌ای است، که در سطوح تماس، به وجود می‌آید. نتایج نشان می‌دهد که این پدیده تابعی از عوامل بسیاری نظیر سرعت لغزش، شتاب، طول لغزش بحرانی، دما، نیروی عمودی سطح، رطوبت، کیفیت سطح و خواص مواد است [۱]. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، موفقیت مدل در پیش‌بینی نتایج تجربی به شدت به مدل اصطکاک حساس باقی می‌ماند. الهامی و زینلی [۲]، در بررسی پدیده فلاتر به این نتیجه رسیدند که اثر اتصال مفصلی به مقدار قابل توجهی نیروی بحرانی فلاتر را کاهش می‌دهد که در اتصال مفصلی اصطکاک می‌تواند یکی از عوامل مهم و تاثیرگذار باشد. برای تحلیل پاسخ دینامیکی سازه‌هایی که در آنها تماس اصطکاک وجود دارد، از دو روش به نام‌های لغزش کلی^۱ و ریزلغزش^۲ استفاده می‌شود که به خاطر سهولت ریاضی، روش لغزش کلی به صورت گسترده‌تری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برگر^۳ در سال ۲۰۰۲ به مطالعه جامعی در مورد جنبه‌های مختلف بررسی اصطکاک، در سامانه‌های دینامیکی پرداخت و با مرور ۱۹۶ مرجع مختلف، نتیجه‌ی مطالعاتش را منتشر نمود، وی عنوان می‌کند که پاسخ چسبندگی^۴- لغزش^۵، نقش اولیه را در بسیاری از مسائل مهندسی و کنترل، خستگی سایشی^۶، مکانیک خاک^۷ و استهلاک اصطکاک ایفا می‌کند [۱].

مدل اصطکاک که در آن تمام سطح تماس، فقط در یکی از حالات چسبندگی و یا لغزش و یا جدایش می‌تواند باشد و لغزش جزئی در آن امکان‌پذیر نیست، اصطلاحاً مدل "لغزش کلی" نامیده می‌شود و از آن به صورت گسترده استفاده می‌شود و زمانی که نیروی عمودی، کوچک باشد تطابق خوبی با شرایط واقعی دارد. کاویان‌پور و فیروزآبادی [۳]، با تحلیل لغزش کلی و با استفاده از مدل والانیس و مدل کلاسیک کولمب، تیر اوپلر برنولی را با وجود قید اصطکاک خشک ضعیف در شرایط تکیه‌گاهی را مورد بررسی قرار داده است. در گذشته، عده‌ای از محققان، با استفاده از مدل لغزش کلی به تحلیل مرزهای گذر از حالت‌های چسبندگی، لغزش و جدایش پرداخته‌اند که تنها برای تماس نقطه‌ای صادق است. منک^۸ و همکارانش [۴] در ۱۹۸۶ حالت‌های چسبندگی- لغزش- جدایش^۹ را به منظور تعیین پاسخ تحریک اجباری طبقات پره‌ی شرود^{۱۰} شده، بررسی و تحلیل کردند و فرمولی تحلیلی برای نیروی اصطکاک تماسی ایجاد شده، به دست آوردند. چند مدل جامع‌تر که در آنها تاثیر نیروی عمودی متغیر منظور شده بود، توسط یانگ^{۱۱} و همکاران [۵] توسعه یافت، آنها در سال ۱۹۹۸ معیار گذری را برای حالات چسبندگی- لغزش- جدایش توسعه دادند که در معرض یک نیروی عمودی متغیر زمانی قرار داشت، همچنین برای زوایای گذر، فرمول‌هایی تحلیلی به دست آوردند. در سال ۱۹۹۸ یانگ و منک [۶]، تاثیر تغییرات نیروی عمودی را در حرکت هارمونیک سه‌بعدی بررسی کردند. چن^{۱۲} و همکاران [۷] برای حرکت پرئودیک سه‌بعدی از معیاری مشابه با معیارهای معرفی شده در مرجع [۵] بهره بردند. پترف^{۱۳} و یووینز^{۱۴} در [۸] تحقیقاتشان را برای حرکت مماسی یک‌بعدی با نیروی عمودی متغیر منتشر کردند و برای تعیین زوایای گذر، الگوریتمی عددی را برای حرکت پرئودیک راپیشنهاد نمودند.

به‌هرحال، هنگامی که فشار تماس اصطکاک بزرگ است ریزلغزش، یا لغزش جزئی سطوح اصطکاک، اهمیت پیدا می‌کند و در نظر گرفتن آن در تحلیل ضروری است. از جنبه‌های جالب توجه روش ریزلغزش اینست که فرض می‌شود که نسبت به یک مدل تماس تک‌نقطه، در این تحلیل، نیروی اصطکاک در

8- Menq
9- Separation
10- Shrouded Fan Stages
11- Yang
12- Chen
13- Petrov
14- Ewins

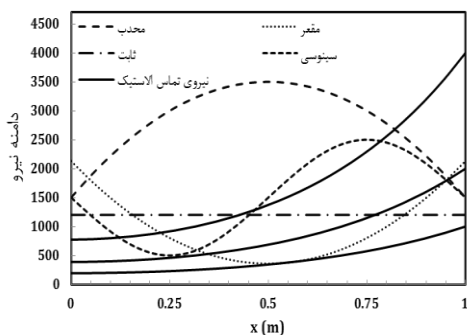
1- Macro Slip
2- Micro Slip
3- Berger
4- Stick
5- Slip
6- Fretting Fatigue
7- Geo Mechanic

آوردن مناطق چسبندگی- لغزش- جدایش لحاظ شده است و معیارهایی برای گذر از یک حالت به حالت دیگر ارائه نمودند. در این مدل سامانه به شکل گسسته در می آید و با استفاده از روش‌هایی مانند روش تکرار و هارمونیک بالانس، مناطق چسبندگی- لغزش- جدایش تحلیل می‌شود.

در سال ۲۰۱۳ اسدی و احمدیان [۱۵] از الگوریتمی مشابه با آنچه در [۱۴] پیشنهاد شده، برای تعیین محدوده شروع لغزش در یک تیر بهره بردند. ایشان برای اولین بار تیر قرار گرفته در شرایط چسبندگی و لغزش را به صورت دینامیکی مدل‌سازی کردند و توانستند به صورت تحلیلی شروع لغزش را پیش‌بینی نمایند.

یکی از نقاط ضعف کارهای تحلیلی در زمینه بررسی مناطق چسبندگی- لغزش، لزوم در نظر گرفتن فرض‌هایی درباره تعداد و موقعیت مناطق، پیش از آغاز تحلیل است. به عنوان نمونه در [۱۴]، در گام اول با استفاده از مقایسه نیروهای عمودی و الاستیک میله، برای توزیع‌های نیروی عمودی محدب^۲ و مقعر، به ترتیب تحلیل دومانطقه‌ای و سه منطقه‌ای ارائه گردیده و این در حالی است که برای توزیع‌های پیچیده‌تر نیرو، اظهار نظر در مورد تعداد و موقعیت مناطق بسیار پیچیده می‌شود، به گونه‌ای که ممکن است در جریان نوسان میله، مناطقی حذف یا اضافه شوند. از این رو در کار حاضر با کلیت‌بخشیدن به معادلات مربوط به هر منطقه، الگوریتمی ارائه شده است که با بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیک، در ضمن تحلیل، تعداد، طول و موقعیت مناطق چسبندگی- لغزش به صورت خودکار تعیین می‌شود.

در شکل ۱ نیروهای الاستیک تماس با خطوط توپر نشان داده شده است. در این شکل، دامنه نیروی الاستیک با افزایش دامنه تحریک، افزایش می‌یابد، و برخورد این نیرو با نیروی نرمال نقطه شروع لغزش را نشان می‌دهد.



شکل (۱): چند نوع توزیع نیروی نرمال و نیروی تماس الاستیک.

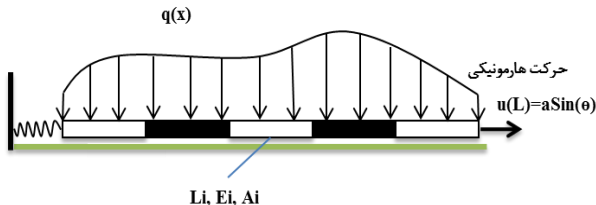
سراسر یک سطح تماس سریع‌تر منتقل می‌شود، و این توزیع مناطق اصطکاک لغزشی و توزیع مناطق اصطکاک چسبندگی، توسط معیارهای گذر مبتنی بر قانون کولمب تعیین می‌شود [۹].

در مراجع [۱۲-۱۰] بر روی تاثیر ریزلغزش در ارتعاشات سازه‌های مقید با قید اصطکاک و اهمیت آن به صورت تجربی تحقیق شده است. توجه به این نکته مهم است که به خاطر پیچیدگی ریاضی مدل‌سازی ریزلغزش، بیشترین مدل‌هایی که برای بررسی اصطکاک در حالت لغزش جزئی ارائه می‌شود، برای سازه‌های ساده و سینماتیک تماسی ساده است که در آنها مسائل تماسی به صورت واقعی بررسی نمی‌شود. منک و همکاران [۱۳]، یک مدل اصطکاک ریزلغزش پیوسته را توسعه دادند، و در آن، یک میله الاستیک که تحت توزیع یکنواخت نیروی عمودی قرار دارد و با زمین در تماس است را بررسی کردند. آنها یک لایه برشی بین زمین و میله در نظر گرفتند که در آن قبل از شروع لغزش، مقدار تغییر شکل الاستیک معینی مجاز است. میله‌ی الاستیک به یک فنر در انتهای چپ مقید شده است، و یک جابه‌جایی تک‌هارمونیک به انتهای دیگر میله وارد می‌شود. در مرجع مذکور، مستهلک‌کننده‌ای مبتنی بر مدل اصطکاک ریزلغزش پیشنهاد شده و مدل پیشنهادی در یک نوسان‌گر یک‌درجه آزادی استفاده شده است. مشاهده گردید که برای توزیع نیروی عمودی با مقادیر بزرگ، با تغییر شرایط از چسبندگی به لغزش، پاسخ رزونانس ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

جیگراوگلو^۱ و همکاران [۱۴] یک مدل یک‌بعدی دینامیکی ریزلغزش بر پایه مدل ارائه شده در مرجع [۱۳] که شامل استهلاک اینرسی است را توسعه دادند. آنها سه نوع توزیع مختلف نیروی عمودی که در سطوح تماس اصطکاک اثر می‌گذارند را در نظر گرفتند و با استفاده از روش تحلیلی و لحاظ نمودن تنها یک مود از میله، نواحی گذر از حالت‌های چسبندگی- لغزش را برای هر توزیع نیرو و برای تحلیل دومانطقه‌ای و سه منطقه‌ای به دست آوردند. همچنین، تاثیر فرکانس تحریک روی منحنی‌های هیستریزس و ضرایب فوریه را بررسی کردند و نتایج به دست آمده را با یکدیگر مقایسه نمودند. جیگراوگلو و همکاران [۹] با تعمیم تحلیل‌های انجام یافته در مقاله قبلی خود، یک مدل ریزلغزش جامع‌تری ارائه دادند که در آن نقش تغییرات نیروی عمودی در به وجود

۲- مدل سازی

در این بخش، جهت مدل سازی رفتار دینامیکی میله، معادلات حاکم بر حرکت میله و پاسخ تحلیلی این معادلات، در حالات جداگانه دارای اصطکاک چسبندگی و اصطکاک لغزشی، تعیین می شود. سازه میله مورد مطالعه در شکل ۲ نمایش داده شده است.



شکل (۲): نمایش نمادین میله تحت بارگذاری به همراه

تقسیمات تصادفی چسبندگی و لغزش در آن.

ارتعاشات میله در مرجع [۱۳] به تفصیل بررسی شده است. معادلات دیفرانسیل جزئی مربوط به میله، که به ترتیب، دارای اتصالات اصطکاکی چسبندگی و اصطکاکی لغزشی است، به صورت زیر می باشد:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k(u(x, \theta) - w(x)) = \rho A \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad 0 \leq x \leq L_i \quad (3)$$

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \text{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \mu q(x) = \rho A \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad 0 \leq x \leq L_i \quad (4)$$

که در آن، sgn تابع علامت است و $w(x)$ ، جابه جایی اولیه میله است که فرض شده است، در سامانه مورد بررسی برابر صفر است. ارتباط هر بخش از میله با بخش های مجاور از طریق معادلات سازگاری برقرار می شود. معادلات سازگاری، براساس پیوستگی جابه جایی و شیب در مرز اتصال بخش های i و $i+1$ ، به صورت زیر است:

$$u_i(L_i, \theta) = u_{i+1}(0, \theta) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{L_i} = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} \Big|_{L_i} \quad (6)$$

شرایط مرزی برای میله نشان داده شده در شکل ۲، به صورت زیر خواهد بود:

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta u(0, \theta) \quad (7)$$

$$u(L, \theta) = a \sin(\theta) \quad (8)$$

در جدول ۱ توابع مربوط به چهار نوع توزیع نیروی نرمال آورده شده است.

جدول (۱): ضابطه انواع توزیع نیروهای عمودی.

شکل توزیع نیروی عمودی	تابع توزیع نیروی عمودی kN
محدب	$-400x(x-1)+75$
مقعر	$200x(x-1)-25$
ثابت	50
سینوسی	$-50\text{Sin}(2\pi x)+50$

تعریف نیروی تماس و نیروی اصطکاک به ترتیب، در معادلات (۱) و (۲) آورده شده است.

$$F_c = |K_t(u(x))| \quad (1)$$

$$F_f = \mu q(x) \quad (2)$$

جیگر اوغلو [۱۱] عنوان می کند که برای تحلیل مناطق چسبندگی - لغزش ابتدا نموداری مانند شکل ۱ رسم می کنیم و پیش از تحلیل، تعداد مناطق را تعیین می کند اما برخلاف گفته های ایشان مشاهده می شود که:

۱- برای همه حالات، توزیع نیروی نرمال مقعر، دو منطقه ای نیست و ممکن است بسته به دامنه تحریک در لحظاتی یک منطقه، دو منطقه و یا حتی سه منطقه باشد.

۲- برای برخی توزیع های نیرو که در واقعیت بسیار محتمل تر است، مانند توزیع سینوسی تعداد حالت ها پیچیده می شود و همچنین ترتیب نیز تعویض می گردد.

همچنین کار ایشان در مواجهه با نتایج عددی و برای مدل سازی واقعی آن دچار مشکل است، زیرا برای رسیدن به این منظور نیاز است که مدل سازی به گونه ای باشد که بتوان مناطق را بسته به توابع هدف به دست آمده از نتایج تجربی تعیین نمود.

در این مقاله با در نظر گرفتن حل تحلیلی و دقیق، برای مدل سازی کلی سامانه و تعیین مرز چسبندگی - لغزش، الگوریتمی ارائه شده است که در بخشی از آن با بهره گیری از الگوریتم ژنتیک این مرزها تعیین می شود. مزیت این روش آنست که نیازی نیست پیش از حل سامانه در مورد تعداد مناطق و یا حتی نحوه تغییر مرز نظری ارائه داده شود.

سامانه، مجهولات مسئله علاوه بر ضرایب مجهول مربوط به پاسخ هر بخش، شامل موارد زیر است:

- تعداد تقسیمات در میله (n)،
- ترتیب چینش بخش‌های لغزش و چسبندگی در طول میله و
- طول هر بخش (L_i)

به همین منظور، برای تعیین این مجهولات نیاز به معادلات اضافی داریم. این معادلات را معیار گذر از ناحیه چسبندگی به لغزش در اختیار می‌گذارد [۱۱] و [۶]:

$$|k(u(L_j, \theta) - w(L_j))| = \mu q(L_j) \quad (14)$$

که در آن، L_j مربوط به المانی است که در آن حالت گذر رخ می‌دهد. با برقراری معادلات مربوط به معیار گذر می‌توان متغیرهای اضافی را به شکل بهینه محاسبه نمود.

۳- الگوریتم حل مسأله

همان‌طور که ذکر شد، تحلیل نواحی گذر به روش ارائه شده در [۱۱] در حالت کلی پیچیده است، و تعیین تعداد و طول نواحی گذر و همچنین، انطباق با داده‌های تست در آن روش، در حالت کلی، با مشکل مواجه است و کارآمدی آن را مبهم می‌نماید. برای تحلیل کارآمد جهت تعیین نواحی گذر، دو پیشنهاد مطرح می‌شود:

- میله را به تعداد بخش‌های کافی تقسیم نمود و طول هر بخش را معلوم فرض کرد. با تعیین معادلات سامانه برای حالات گذر چسبندگی به لغزش، محتمل دانستن هر دو حالت برای هر بخش و بررسی تمام چینش‌های محتمل نواحی چسبندگی-لغزش، تابع هدف مربوط به معیار گذر را کمینه نمود، و در نهایت، چینش واقعی (بهینه‌ی) نواحی لغزش و چسبندگی سامانه را مشخص نمود و

- می‌توان تعداد بخش‌ها را به تعداد لازم در نظر گرفت، و در مقابل، طول بخش‌ها را مجهول فرض نمود. آنگاه، به کمک کمینه‌سازی تابع هدف مربوط به معیار گذر، طول هر یک از بخش‌ها را محاسبه کرد.

در این مقاله، پیشنهاد دوم، جهت تعیین نواحی گذر اجرا شده است. میله‌ای دارای بخش‌هایی با طول مجهول لحاظ می‌شود، به طوری که، در هر بخش امکان وقوع لغزش یا چسبندگی وجود دارد و در مرزهای اتصال بخش‌ها معادلات سازگاری برقرار است. به طور کلی، به‌ازاء یک چینش مفروض مربوط به نواحی چسبندگی و لغزش، یک معادله به‌دست

با توجه به اینکه تحریک به صورت تک‌هارمونیک است، برای حل این معادلات، پاسخ را به صورت ترکیبی از دو قسمت ثابت زمانی و متغیر زمانی در نظر می‌گیریم، در مراجع [۱۶-۱۷] حل چنین معادلاتی بررسی شده است. و چون معادلات در مجموع ناهمگن است جواب پایای معادلات به صورت زیر خواهد بود.

$$u = u_s(x) + u_d(x, \theta), \quad L_{i-1} \leq x \leq L_i \quad (9)$$

که در آن، $u_s(x)$ قسمت استاتیکی پاسخ کل و $u_d(x)$ قسمت دینامیک پاسخ کل است، پاسخ برای بخش لغزش و چسبندگی به ترتیب به صورت معادلات (۱۰) و (۱۱) خواهد بود.

$$\begin{cases} u_s(x) = D_1 \sinh(\lambda x) + D_2 \cosh(\lambda x) \\ u_d(x, \theta) = (C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x)) \sin(\theta) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} u_s = Q(x) + c_1 x + c_0 \\ u_d(x, \theta) = (C_3 \sin(\alpha x) + C_4 \cos(\alpha x)) \sin(\theta) \end{cases} \quad (11)$$

α ، λ و γ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{EA}}, \alpha = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \gamma = \sqrt{\frac{k}{EA} - \frac{\rho}{E}} \omega^2 \quad (12)$$

فرض می‌کنیم که می‌خواهیم سامانه‌ای را تشکیل بدهیم که ترتیب چینش مناطق لغزش و چسبندگی را در آن می‌دانیم، در این حالت برای هر بخش، بسته به حالت لغزش و یا چسبندگی بودن، از معادلات (۱۰) و (۱۱) استفاده می‌کنیم و با بهره‌گیری از معادلات سازگاری (۵) و (۶) در محل فصل مشترک دو بخش، و همچنین شرایط مرزی، دستگاه $2n$ معادله‌ی $4n$ مجهولی تشکیل می‌شود، که در آن n تعداد تکه‌های تشکیل دهنده سامانه است.

با دسته‌بندی هر کدام از معادلات و با جداسازی ضرایب $\sin(\theta)$ ، دو معادله به‌دست می‌آید و در نتیجه در کل، تعداد معادلات مستقل برای حل مسأله $4n$ و تعداد مجهولات نیز $4n$ خواهد بود. معادلات و مجهولات را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

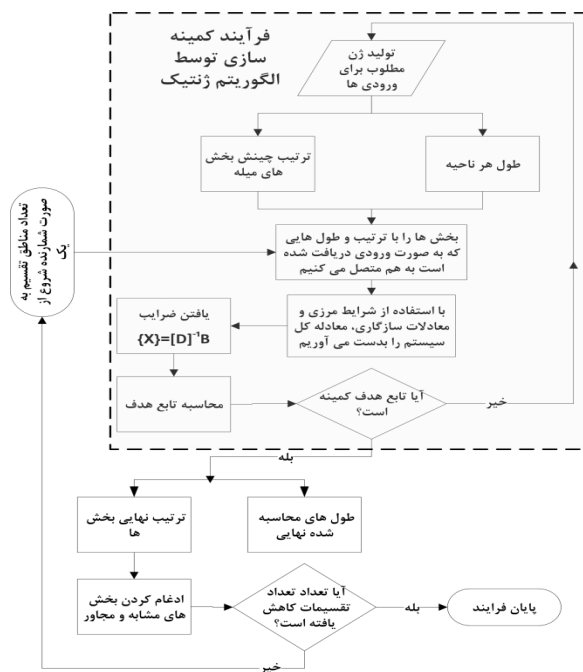
$$[D]\{X\} = \{B\} \quad (13)$$

که در آن، بردار X حاوی ضرایب مربوط به هر بخش از میله است. لازم به ذکر است که در رابطه جابه‌جایی هر بخش، چهار ضریب مجهول وجود دارد. برای کل سامانه، $[D]$ یک ماتریس مربعی دارای رتبه $4n$ است که در آن، n تعداد بخش‌های میله است. برای تحلیل نواحی چسبندگی-لغزش و محاسبه پاسخ

یک بار مساله حل می شود و ترتیب چینش تعیین می گردد با ترتیب به دست آمده دوباره تعداد تقسیمات به روز می شود بدین صورت که بخش های مشابه که کنار هم قرار می گیرند در هم ادغام می شوند اگر به ازای یک تعداد تقسیم، تعداد تقسیمات نهایی کمتری به دست آمد نتیجه می گیریم که آخرین افزایش تعداد تقسیمات اضافی بوده است و از کل برنامه خارج می شویم و مقادیر مربوط به تعداد تقسیمات قبلی را به عنوان پاسخ مساله و حل مساله مورد مطالعه، در نظر می گیریم.

۳-۱- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک^۱ تکنیک جستجو در علم رایانه برای یافتن راه حل تقریبی برای بهینه سازی و مسائل جستجو است. الگوریتم ژنتیک نوع خاصی از الگوریتم های تکامل است که از تکنیک های زیست شناسی فراگشتی مانند وراثت و جهش استفاده می کند. این الگوریتم برای اولین بار توسط جان هلند^۲ معرفی شد.



شکل (۳): الگوریتم حل مساله.

در واقع الگوریتم های ژنتیک از اصول انتخاب طبیعی داروین

می آید. با استفاده از الگوریتمی که فلوچارت آن در شکل ۳ قابل مشاهده است، ترتیب و طول بخش های مربوط به چسبندگی و لغزش به روز رسانی می شود.

مراحل نشان داده شده در شکل ۳ در زیر توضیح داده شده است:

- تعداد بخش ها از یک شروع شده و در هر مرحله، نسبت به مرحله قبل، یک بخش تعداد بخش ها اضافه می شود،
- در الگوریتم ژنتیک با قراردادن ترتیب و طول های مختلف، مقدار بهینه، به ازای ترتیب و طول معین، برای توابع هدف به دست می آید،
- اگر با ادغام کردن بخش های مشابه مجاور تعداد مناطق کاهش یافت برنامه متوقف می شود و ترتیب و طول هر ناحیه به عنوان خروجی نهایی برنامه معرفی می شود و
- اگر مرحله ۳ با موفقیت همراه نبود، برنامه مجدداً به مرحله ۱ منتقل شده و اجرای برنامه ادامه می یابد تا در نهایت به ترتیب و طول نهایی برسیم.
- متغیرهای مساله، اعم از ورودی ها و خروجی های مطلوب، در جدول ۲ دسته بندی شده است.

جدول (۲): متغیرهای مساله که در ضمن کمینه سازی تعیین می گردد.

متغیر ^(*)	توضیحات	تعداد
تعداد تقسیمات میله	m از یک تا هر عدد طبیعی n می تواند باشد	۱
ترتیب چینش بخش های میله	یک بردار m عضوی ^(**)	۱
طول هر بخش از میله	بازه ی تغییرات از صفر تا طول کل میله است	M

^(*) منظور ورودی های برنامه است.

^(**) به صورت یک بردار m عضوی که از آرایه های صفر (برای حالت لغزش).

و یک (برای حالت چسبندگی) تشکیل یافته است.

با توجه به شکل ۳ دو نوع محدودیت برای حل مساله در نظر گرفته می شود، محدودیت اول ارضای تابع هدف است، برای هر تعداد تقسیم بندی یک بار الگوریتم ژنتیک استفاده می شود و دومی، محدودیتی است که طی ارضای آن تعداد تقسیم بندی به صورت عدد نهایی و صحیح خود تعیین می گردد این محدودیت بدین گونه تعریف می گردد که ابتدا تعداد تقسیمات را از عدد یک، افزایش می دهیم و در هر تعداد تقسیم

تنها با یک تابع هدف دنبال شود، تابع هدف کلی را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$ObjectiveFunction = \|\{OB\}\| \quad (۱۹)$$

در صورتی که تعداد مناطق گذر زیاد باشد اصولاً تعریف یک تابع هدف ما را به مقصود نمی‌رساند و نیاز خواهد بود که از چند تابع هدف همزمان استفاده کنیم به این منظور لازم است از الگوریتم ژنتیک چند تابع هدفی^۱ استفاده نمود که در آن از الگوریتم جستجوی پرتو^۲ استفاده می‌شود. ولی تا ۵ ناحیه مختلف از الگوریتم ژنتیک یک خروجی، جواب‌های قابل قبول به دست آمده است.

۴- بحث و نتایج

در این قسمت مرزهای چسبندگی- لغزش برای سیستم مورد مطالعه برای دو نوع توزیع نیروی نرمال، یعنی توزیع مقعر و محدب به دست آمده است و اعتبار نتایج با مرجع [۱۱] و همچنین مدل المان محدود سنجدیده شده است. مشخصات سیستم مورد بررسی در جدول ۳ آورده شده است.

ابتدا برای یک بخش میله به طول واحد، که تحت شرایط اصطکاک چسبندگی قرار دارد و یک بخش میله که تحت شرایط لغزش کامل قرار دارد، معادلات را حل کرده و با اعمال شرایط مرزی فرکانس‌های طبیعی هر میله را به دست می‌آوریم. با استفاده از دترمینان ماتریس ضرایب، معادله (۱۳) در فرکانس‌های مختلف شکل ۴ را برای حالت چسبندگی و لغزش کامل می‌توان رسم کرد، فرکانس ۱۹۰۰ هرتز که در حالت چسبندگی کامل دیده می‌شود، جزء فرکانس‌های طبیعی نیست و مود صلب سازه به خاطر وجود قید فنر می‌باشد، کاهش فرکانس رزونانس با گذر از چسبندگی به لغزش مشهود است.

جدول (۳): مشخصات فیزیکی سیستم.

متغیر	نماد	مقدار	واحد
مدول الاستیسیته	E	200	GPa
مساحت سطح مقطع	A	9×10^{-6}	m^2
طول میله	L	1	m
سختی لایه برشی	K	1×10^8	Nm^{-2}
سختی قید تکیه گاهی	β	1×10^6	Nm^{-1}
چگالی	ρ	7800	kgm^{-3}
ضریب اصطکاک کولمب ^۱	μ	0.02	

برای یافتن فرمول بهینه جهت پیش‌بینی یا تطبیق الگو استفاده می‌کنند. الگوریتم‌های ژنتیک اغلب گزینه خوبی برای تکنیک‌های پیش‌بینی بر مبنای رگرسیون هستند. هر ژن مورد استفاده در این الگوریتم از مجموعه‌ای کروموزوم تشکیل شده که همان متغیرهای طراحی هستند. وظیفه الگوریتم ژنتیک تولید ژن‌هایی است که کمترین مقدار تابع هدف را ایجاد کنند. معمولاً تولید ژن‌های اولیه در چارچوب محدودیت‌های اولیه اعمال شده برای متغیرها ایجاد می‌شود. تولید این نسل با استفاده از روابط (۱۵) تا (۱۷) صورت می‌گیرد.

$$G = \begin{cases} G_L & i = 1 \\ G_L + \epsilon(G_U - G_L) & 2 \leq i \leq N - 1 \\ G_U & i = N \end{cases} \quad (۱۵)$$

$$G = [X_1, \dots, X_j, \dots, X_M]$$

$$G_L = [X_{1L}, \dots, X_{jL}, \dots, X_{ML}]$$

$$G_U = [X_{1U}, \dots, X_{jU}, \dots, X_{MU}] \quad (۱۶)$$

$$X_{jL} \leq X_j \leq X_{jU} \quad (۱۷)$$

که N تعداد ژن، M تعداد متغیر طراحی (کروموزوم)، X متغیر طراحی، ϵ عدد تصادفی بین صفر و یک، G ژن و زیرنویس‌های L و U به ترتیب نماینده مقادیر کمینه و بیشینه هستند.

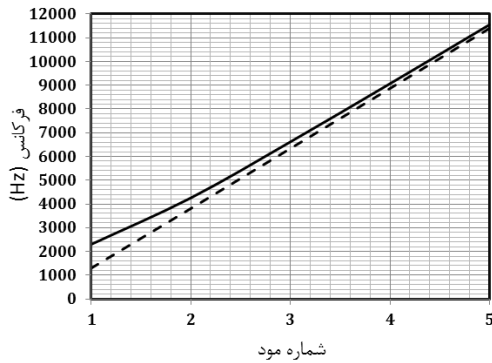
تولید ژن‌های نسل‌های بعد با انتخاب پدر و مادرهایی از ژن‌های نسل قبل انجام می‌گیرد. برای انتخاب نسل جدید، ژن‌ها بر اساس مقدار تابع هدف ایجاد شده مرتب می‌شوند و از میان ژن‌های برتر (ژن‌هایی که کمترین مقدار تابع هدف را دارند)، نسل جدید تولید می‌شود [۱۵].

۳-۲- کمینه‌سازی معیار گذر

از آنجایی که مقدار توابع طوری تعیین می‌شود که در نزدیکی‌های متغیرهای بهینه، کمینه باشد، ضروری است برای یافتن ترتیب چینش بخش‌ها و طول هر بخش و همچنین تعداد بهینه تکرار، تلاش شود و توابع هدف کمینه و نزدیک صفر شود. به علت تعداد زیاد متغیرها و خاصیت غیرخطی معادلات جبری ایجاد شده برای این کار، از الگوریتم ژنتیک استفاده می‌کنیم. به همین منظور تابع هدف را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$OB_j = |k(u(L_j, \theta) - w(L_j))| - \mu q(L_j) \quad j=1, \dots, m \quad (۱۸)$$

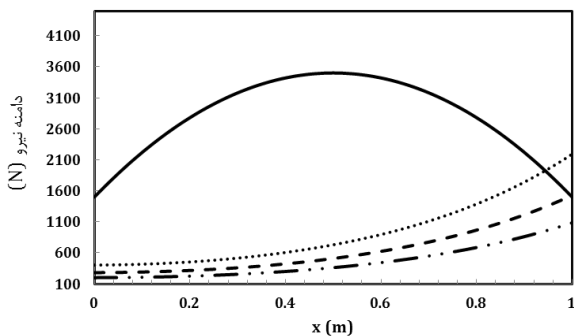
که در آن، m تعداد محل‌هایی است که گذر چسبندگی- لغزش رخ می‌دهد. برای اینکه کار کمینه‌سازی



شکل (۵): منحنی تغییرات فرکانس‌های طبیعی در حالت چسبندگی (خط پر) و لغزش کامل (خط چین).

از صفر تا یک مقدار بزرگ افزایش می‌یابد اتفاقی که در میله رخ می‌دهد بدین صورت است که ابتدا میله به‌طور کلی در حالت اصطکاک چسبندگی قرار دارد، سپس با افزایش دامنه تحریک با توجه به توزیع نیروی نرمال، نواحی لغزش در میله، در مناطقی که نیروی نرمال با نیروی الاستیک برابر شده باشد، ایجاد شده و گسترش می‌یابد و در نهایت میله به‌طور کلی در حالت لغزش قرار می‌گیرد.

همان‌طور که پیش‌تر در توصیف شکل ۱ ذکر شد، برای یافتن کمینه دامنه تحریک لازم برای شروع لغزش، می‌توانیم منحنی نیروی الاستیک میله در حالت چسبندگی کامل با نیروی موثر نرمال، را قطع دهیم، آنگاه کوچک‌ترین دامنه تحریک که به‌ازای آن منحنی‌ها هم‌دیگر را قطع می‌کنند، مربوط به کمینه دامنه لازم برای شروع لغزش است.

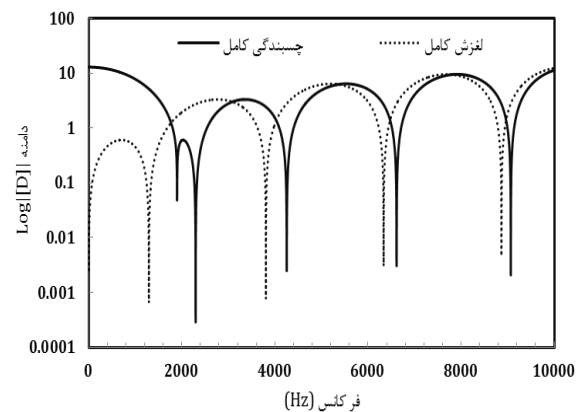


شکل (۶): شروع لغزش برای توزیع نرمال محذب.

برای همین سامانه و با در نظر گرفتن تحریک به‌صورت نیروی هارمونیک، پیش‌بینی می‌شد که کمینه نیروی لازم برای شروع لغزش با افزایش فرکانس تحریک افزایش می‌یابد چون اصولاً در فرکانس‌های بالاتر دامنه جابه‌جایی برای دامنه نیروهای برابر کاهش می‌یابد و برای جبران این کمبود، ضروری

چون سامانه در حالت لغزش، آزادی حرکت بیشتری نسبت به حالت چسبندگی کامل دارد در نتیجه در مقایسه با حالت چسبندگی کامل، سختی تماسی لایه برشی کمتر می‌شود و در نتیجه از قبل می‌توانستیم پیش‌بینی کنیم که فرکانس طبیعی سامانه کاهش یابد، این کاهش مقدار فرکانس طبیعی در حالت لغزش از جدول ۴ پیداست.

نکته قابل توجه در جدول ۴ این موضوع است که این اختلاف در مدهای بالاتر بسیار کم می‌شود و بیشترین اختلاف مربوط به مد اول است، تا جایی که ممکن است فرکانس تشدید، در نصف مقدار فرکانس طبیعی حالت چسبندگی کامل رخ دهد.

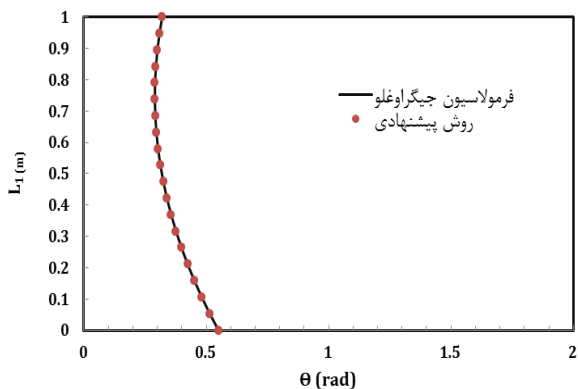


شکل (۴): محل فرکانس‌های طبیعی در حالت چسبندگی و در حالت لغزش کامل.

جدول (۴): فرکانس‌های طبیعی میله در حالت چسبندگی کامل و لغزش کامل.

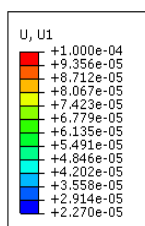
مد	چسبندگی کامل (Hz)	لغزش کامل (Hz)	درصد اختلاف %
اول	۲۲۹۸/۲	۱۲۹۴/۱	۴۳/۷
دوم	۴۲۵۴/۴	۳۸۰۷/۳	۱۰/۵
سوم	۶۶۱۴/۳ using ۷	۶۳۳۵/۴	۴/۲
چهارم	۹۰۶۷/۹	۸۸۶۵/۶	۲/۲
پنجم	۱۵۵۳/۷	۱۱۳۹۶/۷	۱/۴

در شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی سیستم در دو حالت اصطکاک چسبندگی و لغزش رسم شده است، این اختلاف به وضوح قابل مشاهده است.



شکل (۹): مناطق چسبندگی - لغزش برای توزیع نرمال مقعر.

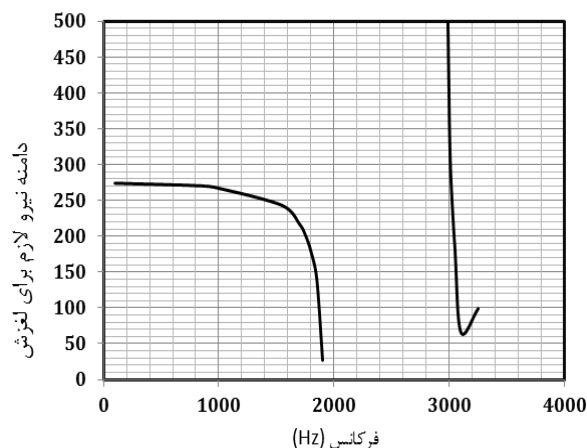
در شکل های ۹-۸ نتایج کاملاً منطبق بر نتایج به دست آمده از فرمولاسیون موجود در مرجع [۱۱] است، همان گونه که در شکل ۸ مشاهده می شود، در حالت توزیع نیروی محذب، نواحی چسبندگی - لغزش ابتدا در دامنه نیروی پایین یک منطقه ای (به طور کلی چسبندگی) سپس دو منطقه ای و در نهایت به یک منطقه ای لغزش کامل تبدیل می شود، لغزش از سمت راست میله شروع شده و با افزایش دامنه نیرو به سمت انتهای چپ میله می رسد، در شکل ۹ که مربوط به توزیع نیروی نرمال مقعر است روند شروع و رشد مرز لغزش متفاوت است. و به علت اینکه نیرو در میانه تیر بیشینه است و در دو انتها کاهش پیدا می کند، لغزش از میانه میله شروع شده و با افزایش دامنه نیرو به طرفین میله رشد پیدا می کند. در ادامه میله مورد بررسی در نرم افزار Abaqus/explicit به صورت مدل المان محدود مدل شده است.



شکل (۱۰): میله مدل شده در نرم افزار آباکوس با قید فنر الاستیک در ابتدا.

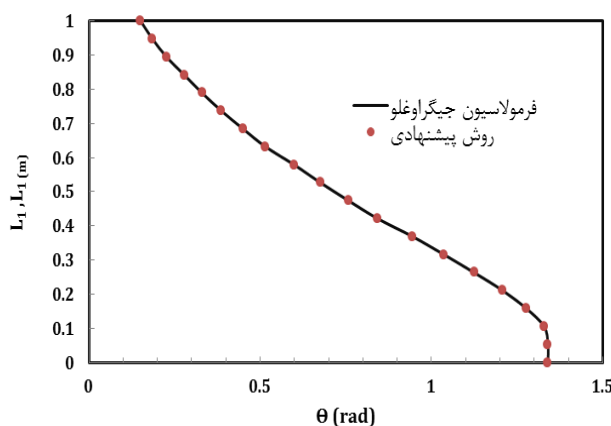
در شکل ۱۰ مدل المان محدود میله را مشاهده می نمایید. که در آن سطح تماس به صورت اصطکاک کولمب و با امکان

است دامنه نیرو افزایش یابد تا جایی ثابت بماند. اما همان طور که در شکل ۷ قابل مشاهده است، کمینه نیروی لازم برای شروع لغزش با افزایش فرکانس تا نزدیکی های فرکانس ۲۲۰۰ هرتز کاهش می یابد، در این فرکانس به خاطر وجود مود صلب سازه، به علت اتصال به قید فنر، منحنی کمینه نیروی لازم برای شروع لغزش حالت مجانبی پیدا می کند. در شکل ۸ برای توزیع نرمال محذب، تغییر کمینه نیروی لازم برای لغزش را نسبت به تغییرات فرکانس آورده شده است.



شکل (۷): تغییرات کمینه نیروی لازم برای لغزش نسبت به تغییرات فرکانس برای توزیع نیروی نرمال محذب.

با استفاده از معادلات ارائه شده در روابط (۱۱-۳) و بهره گیری از الگوریتم معرفی شده در بخش های پیشین، مرزهای چسبندگی - لغزش برای توزیع نرمال محذب به ترتیب در شکل های ۹-۸ نشان داده شده است.



شکل (۸): مناطق چسبندگی - لغزش برای توزیع نرمال محذب.

۵- نتیجه گیری

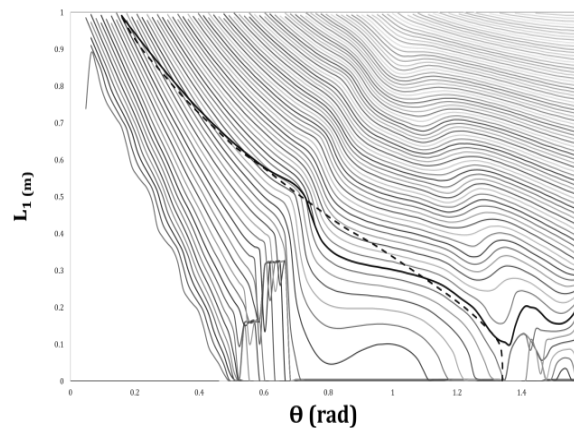
در این مقاله، روشی مبتنی بر پاسخ تحلیلی سامانه ارتعاشی دارای اتصال اصطکاکی، جهت توسعه مدل اصطکاک ریزلغزش ارائه شد. بررسی نواحی چسبندگی و لغزش در اتصال اصطکاکی مربوط به یک میله تحت شرایط مرزی الاستیک و جابه‌جایی تک‌هارمونیک بررسی گردید که این میله تحت بار دو توزیع نیروی عمودی متفاوت قرار داشت، به‌وسیله مدل ریزلغزش پیشنهاد شده تحلیل انجام گردید. نتایج حاصل از روش ارائه شده با نتایج به‌دست آمده از المان محدود سامانه مورد بررسی، به‌خوبی، راستی‌آزمایی گردید. برخلاف پژوهش‌های پیشین انجام شده در این زمینه، در روش ارائه شده نیاز به تعیین تعداد و چینش نواحی چسبندگی و لغزش، پیش از تحلیل این نواحی نیست. برای پیاده‌سازی روش پیشنهاد شده، یک دستورالعمل با استفاده از الگوریتم ژنتیک ارائه شد که در آن، با کمینه‌سازی تابع هدف مربوط به معیار گذر از چسبندگی به لغزش، چینش و طول بخش‌های چسبندگی و لغزش محاسبه گردید. همچنین، مشاهده شد که تغییر شرایط از اصطکاک چسبندگی به لغزش می‌تواند در ویژگی‌های دینامیکی سامانه ارتعاشی، مانند فرکانس طبیعی اول، تغییرات عمده ایجاد کند.

۶- مراجع

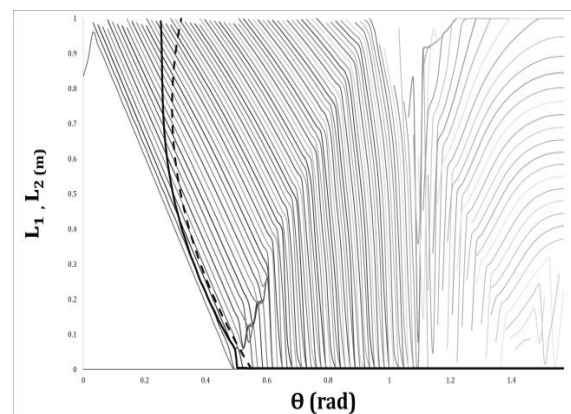
- Berger, E.J. "Friction Modeling for Dynamic System Simulation". Vol. 55, No. 6, pp. 535-577 2002.
- Elhami, M.R. and Zeinali M. "Dynamic Stability Analysis of a Two Free-end Beam Subject to a Non-conservative Following Force", Aero. Mech. J., Vol. 7, No. 1, pp. 15-26, 2011 (In Persian).
- Kavyanpoor, M. and Firouzabadi, R.D. "Vibration Modeling of Beam with Poor Friction on the Two-Point Contact and Validation with the Modal Test Results", Aero. Mech. J., Vol. 10, No. 1, pp. 67-75, 2012 (In Persian).
- Menq, C.H., Griffin, J.H. and Bielak, J. "The Influence of a Variable Normal Load on the Forced Vibration of a Frictionally Damped Structure", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 108, No. 2, pp. 300-305, 1986.
- Yang, B.D., Chu, M.L. and Menq, C.H. "Stick-Slip-Separation Analysis and Non-linear Stiffness and Damping Characterization of Friction Contact Having Variable Normal Load", Journal of Sound and Vibration, Vol. 210, No. 4, pp. 461-481, 1998
- Yang, B.D. and Menq, C.H. "Characterization of 3D Contact Kinematics and Prediction of Resonant Response of Structures Having 3D Frictional

در نظر گرفتن سختی لایه برشی، مدل شده است. ابتدای میله با یک فنر الاستیک مقید شده است.

در شکل‌های ۱۱-۱۲ نتایج شبیه‌سازی برای تحلیل المان محدود آورده شده است و در این اشکال برای مقایسه و اعتبارسنجی نتایج تحلیلی و المان محدود، نتایج تحلیلی نیز آورده شده است. خطوط خاکستری، ترازهای نیروی الاستیک ثابت است و خط توپر مشکی، خطی است که به‌عنوان مرز اصطکاک چسبندگی- لغزش، با استفاده از معیار گذر برای نتایج المان محدود به‌دست آمده است، خط چین مشکی نیز مرز چسبندگی- لغزش به‌دست آمده با استفاده از مدل تحلیلی و روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.



شکل (۱۱): مرزهای گذر چسبندگی- لغزش برای توزیع نیروی نرمال محذب: کانتور جابه‌جایی (خطوط کمرنگ)، مرز تحلیلی (خط چین سیاه)، مرز به‌دست آمده از FEM.



شکل ۱۲: مرزهای گذر چسبندگی- لغزش برای توزیع نیروی نرمال مقعر: کانتور جابه‌جایی (خطوط کمرنگ)، مرز تحلیلی (خط چین سیاه)، مرز به‌دست آمده از FEM.

- Constant”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 217, No. 5, pp. 909-925, 1998
7. Chen, J.J. and Menq, C.H. “Periodic Response of Blades Having Three-Dimensional Non-linear Shroud Constraints. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*”, Vol. 123, No. 4, pp. 901-909, 1999
 8. Petrov, E.P. and Ewins, D.J. “Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks”, *Journal of Turbomachinery*, Vol. 125, No. 2, pp. 364-371, 2003
 9. Cigeroglu, E., An, N. and Menq, C.-H. “A Microslip Friction Model with Normal Load Variation Induced by Normal Motion. *Non-linear Dynamics*”, *Journal of Non-linear Dynamics*, Vol. 50, No. 3, pp. 609-626, 2007.
 10. Menq, C.H., Griffin, J.H. and Bielak, J. “The Influence of Microslip on Vibratory Response, Part II: A Comparison with Experimental Results. *Journal of Sound and Vibration*”, Vol. 107, No. 2, pp. 295-307, 1986.
 11. Filippi, S., Gola, M.M. and Akay, A. “Measurement of Tangential Contact Hysteresis During Microslip. *Journal of Tribology*”, Vol. 126, No. 3, pp. 482-489, 2004.
 12. Koh, K.H., et al., “Characterization of Turbine Blade Friction Dampers”, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 127, No. 4, pp. 856-862. 2004.
 13. Menq, C.H., Bielak, J. and Griffin, J.H. “The Influence of Microslip on Vibratory Response, part I: A New Microslip Model”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 107, No. 2, pp. 279-293, 1986
 14. Cigeroglu, E., Lu, W. and Menq, C.H. “One-dimensional Dynamic Microslip Friction Model”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, No's. 3-5, pp. 881-898, 2006.
 15. Asadi, K., Ahmadian, H. and Jalali, H. “Micro/Macro-Slip Damping in Beams with Frictional Contact Interface”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 21, pp. 4704-4712, 2012.
 16. Rao, S. “*Vibration of Continuous Systems*”, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons. 2007
 17. Jeffrey, A., “*Advanced Engineering Mathematics*”, Harcourt Academic Press. 2002.